1. 设 $S=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\in \mathrm{SM}_2(\mathbb{R})$.

(1) 是否存在 $P\in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ 使得 $S=P^tP$? 如果存在, 计算这样的矩阵 $P$;

(2) 是否存在 $P\in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ 使得 $S=P^tP$? 如果存在, 计算这样的矩阵 $P$.

证: (1) 不存在. 若存在 $P\in GL_2(\mathbb{R})$ s.t. $S=P^tP$,

则 $S$ 正定, 但 $\det(S)=-1<0$ $\rightarrow\Leftarrow$.

(2) 设 $P=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in GL_2(\mathbb{C})$ 使得 $S=P^tP$, 则

$$\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}a^2+c^2=0 \Rightarrow a^2=-c^2 \Rightarrow a=\pm c i\\ ab+cd=1\\ ab+cd=1\\ b^2+d^2=0 \Rightarrow b^2=-d^2 \Rightarrow b=\pm d i\end{cases}$$

$$ab+cd=1 \Rightarrow (\pm c i)(\pm d i)+cd=1$$

$\Rightarrow$ $ci$ 与 $di$ 前面符号不同, i.e. $a=ci$ 且 $b=-di$ 或 $a=-ci$ 且 $b=di$

且 $2cd=1 \Rightarrow cd=\frac{1}{2}$, $\Rightarrow ab=\frac{1}{2}$  且 $a,b,c,d$ 均不为0

则 $P=\begin{pmatrix}\pm c i & \mp d i\\ c & \frac{1}{2c}\end{pmatrix}$  $c\neq 0$

不妨设 $c=\frac{1}{2}$  $a=ci=\frac{1}{2}i$  $b=-di=-i$  $d=1$

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}i & -i\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$$

$\square$

2. 设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$ 且 $\det(A) < 0$. 证明: 存在 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\boldsymbol{x}^t A \boldsymbol{x} < 0$.

法一: (反证法): 若 $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ 均有 $\vec{x}^t A \vec{x} \geq 0$, 则 $A$ 为半正定矩阵.

由上周作业可知, $A$ 半正定 $\Leftrightarrow$ 存在 $B \in M_n(\mathbb{R})$ s.t.

$$A = B^t B$$

则 $\det(A) = \det(B)^2 \geq 0$ 与 $\det(A) < 0$ 矛盾. $\square$

法二: $\det(A) < 0$, 则 $A$ 满秩, 由惯性定理,

$$A \sim_c \begin{pmatrix} E_k & \\ & -E_l \end{pmatrix}$$

i.e. $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ s.t. $P^t A P = \underbrace{\begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & -E_l \end{pmatrix}}$ 令 $D = \begin{pmatrix} E_k & \\ & -E_l \end{pmatrix}$

$$\det(P^t A P) = \underbrace{\det(P)^2}_{\substack{>0 \\ \because \det(P) \neq 0}} \cdot \det(A) < 0$$

$$\det \begin{pmatrix} E_k & \\ & -E_l \end{pmatrix} = 1^k (-1)^l = (-1)^l$$

所以 $l$ 为奇数. 取 $\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \}k \\ \\ \}l \end{array}$ 则 $\vec{y}^t D \vec{y} = -y_{k+1}^2 - \cdots - y_{k+l}^2$

$$= -l < 0$$

$$\vec{y}^t D \vec{y} = \vec{y}^t P^t A P \vec{y} = (P\vec{y})^t A (P\vec{y}) < 0$$

令 $\vec{x} = P\vec{y}$, 从而 $\exists \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ s.t. $\vec{x}^t A \vec{x} < 0$ $\square$

3. 设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$ 正定. 证明: 对于任意的 $m \in \mathbb{Z}$, $A^m$ 正定.

证：因为A正定 所以 存在 $P \in GL_n(\mathbb{R})$，使得

$$A = P^tP.$$

当 $m>0$ 时 $A^m = P^tP\cdot P^tP\cdot \cdots P^tP$

若m为偶数 则 $A^m = (\underbrace{P^tP\cdot P^tP\cdots\cdot P^tP}_{\frac{m}{2}\text{个}P^tP})\cdot(\underbrace{P^tP\cdots\cdot P^tP}_{\frac{m}{2}\text{个}P^tP})$

记 $Q = \underbrace{P^tP\cdot P^tP\cdot\cdots\cdot P^tP}_{\frac{m}{2}\text{个}P^tP}$

则 $Q^t = \underbrace{P^tP\cdot P^tP\cdots P^tP}_{\frac{m}{2}\text{个}} = Q$ $\qquad \underline{P^tP}\ P^tP\ P^tP$

从而 $A^m = Q^t\cdot Q$ 且 Q可逆. 所以$A^m$正定.

若m为奇数 则 $A^m = (\underbrace{P^tP\cdots P^tP}_{\frac{m-1}{2}\text{个}})\ P^tP\ (\underbrace{P^tP\cdots P^tP}_{\frac{m-1}{2}\text{个}})$

令 $R = \underbrace{P^tP\cdots P^tP}_{\frac{m-1}{2}个}$ 则 $R^t = R$ 且 $R \in GL_n(\mathbb{R})$

$\Rightarrow A^m = R^t (P^tP) \cdot R$ 从而 $A^m \sim_c P^tP$

又因为 $P^tP$ 本身为正定矩阵 所以 $A^m$ 正定

法二：$A = \begin{cases} A^{\frac{m}{2}} \cdot A^{\frac{m}{2}} & m为偶 \\ (A^{\frac{m-1}{2}} \cdot P^t)(P \cdot A^{\frac{m-1}{2}}) & m为奇. \end{cases}$

令 $Q = \begin{cases} A^{\frac{m}{2}} & m为偶 \\ P \cdot A^{\frac{m-1}{2}} & m为奇, \end{cases}$ 则 $Q \in GL_n(\mathbb{R})$，从而 $A^m = Q^t Q \Rightarrow A^m$ 正定

当 $m<0$ 时，$A^{-1} = (P^tP)^{-1} = P^{-1}(P^t)^{-1} = ((P^{-1})^t)^t \cdot (P^{-1})^t$，$(P^{-1})^t \in GL_n(\mathbb{R})$

$\Rightarrow A^{-1}$ 也是正定矩阵

从而 $A^m = (A^{-1})^{-m}$ 此时 $A^{-1}$ 正定，$-m>0$

由上述讨论知 $A^m$ 正定.

从而对 $\forall m \in \mathbb{Z}$ 都有 $A^m$ 正定.

□

法三：归纳假设法：

要证：对任意的正定阵 $A$ 以及正整数 $m$，$A^m$ 正定。命题对 $m=1$ 正定.

设 $m>1$ 且假设对 $m-1$ 成立，$\because A$ 正定，$\therefore \exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ s.t. $A = P^tP$

则 $A^m = \underbrace{(P^tP)(P^tP)\cdots(P^tP)(P^tP)}_{m个对} = P^t \cdot \underbrace{(P \cdot P^t)(P \cdot P^t)\cdots(P \cdot P^t)}_{B:=m-1个对} \cdot P$

$P \cdot P^t$ 正定 所以 $B = (P \cdot P^t)^{m-1}$ 由归纳假设知 $B$ 正定，$A^m \sim_c B \Rightarrow A^m$ 正定

4. 求实函数 $p(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A\mathbf{x} + \boldsymbol{\alpha}\mathbf{x} + a$ 的最小值, 其中 $A$ 是 $n$ 阶正定实对称方阵, $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, \ldots, a_n)$ 是 $n$ 维实行向量, $a$ 是实数.

证. 由 $A$ 正定, 存在 $P \in GL_n(\mathbb{R})$ s.t. $A = P^t P$.

则 $p(\vec{x}) = \vec{x}^t P^t P\vec{x} + \vec{\alpha}\cdot\vec{x} + a$

$$= (P\vec{x})^t P\vec{x} + \vec{\alpha}\cdot\vec{x} + a$$

令 $\vec{y} = P\vec{x}$. 则

$$p(\vec{x}) = \vec{y}^t\vec{y} + \vec{\alpha}\cdot P^{-1}\vec{y} + a$$

设 $\vec{\beta} = \vec{\alpha}\cdot P^{-1} = (b_1, \cdots, b_n)$

$$p(\vec{x}) = y_1^2 + \cdots + y_n^2 + b_1 y_1 + \cdots + b_n y_n + a$$

$$= (y_1 + \tfrac{b_1}{2})^2 + \cdots + (y_n + \tfrac{b_n}{2})^2 - \tfrac{b_1^2}{4} - \tfrac{b_2^2}{4} \cdots - \tfrac{b_n^2}{4} + a$$

从而当 $\vec{y} = -\frac{1}{2}\vec{\beta}^t = -\frac{1}{2}\vec{\alpha}P^{-1}$ 时 $p(\vec{x})$ 取最小值:

$$-\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} b_i^2 + a = -\frac{1}{4}\vec{\beta}\cdot\vec{\beta}^t + a = -\frac{1}{4}\cdot\vec{\alpha}P^{-1}\cdot(\vec{\alpha}P^{-1})^t + a$$

$$= -\frac{1}{4}\vec{\alpha}P^{-1}(P^{-1})^t\cdot\vec{\alpha}^t + a$$

$$= -\frac{1}{4}\vec{\alpha}\,A^{-1}\vec{\alpha}^t + a$$

$$= -\frac{1}{4}\alpha A^{-1}\alpha^t + a \qquad \square$$

5. 设 $B \in \mathrm{SM}_{n-1}(\mathbb{R})$ 正定. $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{n-1}$ 且 $a \in \mathbb{R}$, 令

$$A = \begin{pmatrix} B & \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{v}^t & a \end{pmatrix}.$$

证明: 如果 $\det(A) = 0$, 则 $A$ 半正定.

证: Step1. 令 $Q = \begin{pmatrix} E_{n-1} & -B^{-1}\vec{v} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 则 $Q^t A Q = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & a-\vec{v}^t B^{-1}\vec{v} \end{pmatrix}$

Step2: $\det(A)=0 \Rightarrow a-\vec{v}^t B^{-1} v = 0$

Step3. 设 $B \sim_c \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1})$ $\lambda_i > 0$ 则 $A \sim_c \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_{n-1} & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

验证: Step1

因为 $B$ 正定, 所以 $\det(B)>0$, $B$ 可逆. 设 $Q = \begin{pmatrix} E_{n-1} & -B^{-1}\vec{v} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

则 $Q^t = \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ (-B^{-1}\vec{v})^t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ -\vec{v}^t (B^t)^{-1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ -\vec{v}^t B^{-1} & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow Q^t A Q = \begin{pmatrix} B & \vec{v} \\ 0 & -\vec{v}^t B^{-1}\vec{v}+a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_{n-1} & -B^{-1}\vec{v} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & a-\vec{v}^t B^{-1}\vec{v} \end{pmatrix}.$$

Step2: $\det(Q^t A Q) = \det(Q)^2 \cdot \det(A) = 0$

$\Rightarrow \det(B) \cdot (a-\vec{v}^t B^{-1}\vec{v}) = 0$

因为 $B$ 正定 $\Rightarrow a-\vec{v}^t B^{-1}\vec{v} = 0$

step3: $Q^t A Q = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

设 $B \sim_c \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1})$, $\lambda_i > 0$

i.e. $\exists\, P \in GL_{n-1}(\mathbb{R})$ s.t. $P^t B P = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1})$

则 $\begin{pmatrix} P^t & \vec{0}_{n-1\times 1} \\ \vec{0}_{1\times n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & \vec{0} \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} P^t B P & \vec{0}_{n-1\times 1} \\ \vec{0}_{1\times n-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_{n-1} & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A \sim_c \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_{n-1} & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ $\lambda_i > 0$ $1 \le i \le n-1$

$\Rightarrow$ A半正定. $\square$

回顾 关于线性算子的矩阵表示:

定义: 设 $\phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$.

$$\phi(\vec{e}_j) = a_{1j}\varepsilon_1 + \cdots + a_{mj}\varepsilon_m = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m)\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

$j = 1, 2, \cdots, n$. 称

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2,1} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

是 $\phi$ 在基底 $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$ 和 $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m$ 下的矩阵(表示).

当 V 和 W 的基底给定后 $\phi$ 的矩阵表示是唯一的. 我们有

☆ $(\phi(\vec{e}_1),\cdots,\phi(\vec{e}_n))=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m)\cdot A \qquad A\in\mathbb{F}^{m\times n}$

另一种办法求A：看坐标：设 $\vec{x}=x_1\vec{e}_1+\cdots+x_n\vec{e}_n$ 和 $\phi(\vec{x})=y_1\varepsilon_1+\cdots+y_m\varepsilon_m$

则 $$\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$ ☆

这是因为 $\phi(\vec{x})=\phi(x_1\vec{e}_1+\cdots+x_n\vec{e}_n)=(\phi(\vec{e}_1),\cdots,\phi(\vec{e}_n))\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m)\cdot A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

又有 $\phi(\vec{x})=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}$

由坐标唯一性知 $\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

<u>例1.6</u> 设 $A\in F^{2\times2}$，$\phi: F^{2\times2}\to F^{2\times2}$ 由公式 $\forall X\in F^{2\times2}$，

$\phi(X)=AX$ 给出. 求 $\phi$ 在标准基下的矩阵.

$F^{2\times2}$ 中的标准基为 $\{E_{1,1}, E_{2,1}, E_{1,2}, E_{2,2}\}$

设 $\phi(X)=\begin{pmatrix}y_{11}&y_{12}\\ y_{21}&y_{22}\end{pmatrix}=y_{11}E_{11}+y_{21}E_{21}+y_{12}E_{12}+y_{22}E_{22}$

则 $\phi(X)$ 在上述标准基下的坐标为 $\begin{pmatrix}y_{11}\\ y_{21}\\ y_{12}\\ y_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overrightarrow{\phi(X)}^{(1)}\\ \\ \overrightarrow{\phi(X)}^{(2)}\end{pmatrix}$

又因为 $\phi(X)=AX$ 由矩阵乘法的运算知

$\overrightarrow{\phi(X)}^{(1)}=A\cdot\vec{X}^{(1)} \qquad \overrightarrow{\phi(X)}^{(2)}=A\cdot\vec{X}^{(2)}$

时刻谨记X是矩阵

所以

$$\begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ y_{12} \\ y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{\varphi(X)}^{(1)} \\ \overrightarrow{\varphi(X)}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cdot \vec{X}^{(1)} \\ A \cdot \vec{X}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X}^{(1)} \\ \vec{X}^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix}$$

所以 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ 是 $\varphi$ 在标准基 $\{E_{11}\ E_{21}\ E_{12}\ E_{22}\}$ 下的矩阵.

$\square$

上次问题2: $P^t(A+\varepsilon B)P = P^tAP+\varepsilon \underbrace{P^tBP}_{C} = P^tAP+\varepsilon C$.

$B\sim_c C$ $\quad A+\varepsilon B \overset{?}{\sim}_c A+\varepsilon C$

反例: $A=I_2$ $\quad B=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ $\quad C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ 则$B$与$C$合同

而 $A+B=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ 正定 $\quad A+C=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 半正定