

2025年春季学期第十周作业

设 V 是域 F 上的有限维线性空间.

1. 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 满足 $\mathcal{A}^2 = 2\mathcal{A} - \mathcal{E}$,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

且 $f = t^2 - 2 \in F[t]$.

(a) 计算 $\alpha, \beta \in F$ 使得 $f(\mathcal{A}) = \alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{E}$;

(b) 计算 $f(B)$ 和 $\mu(B)$.

2. 设

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} J_2 & O \\ O & O \end{pmatrix}_{4 \times 4}, \quad B = \begin{pmatrix} J_2 & O \\ O & E_2 \end{pmatrix}_{4 \times 4}, \quad C = \begin{pmatrix} J_2 & O \\ O & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}_{4 \times 4}.$$

计算 μ_A , μ_B 和 μ_C .

3. 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 证明: 如果 $V_1, \dots, V_m$ 是 $\mathcal{A}$ 不变子空间, 那么这些子空间的和与交都是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间.

4. 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 满足 $\mathcal{A}^2 = 2\mathcal{A} + 3\mathcal{E}$. 证明: 当 F 的特征不等于 2 时,

$$\text{rank}(\mathcal{A} + \mathcal{E}) + \text{rank}(\mathcal{A} - 3\mathcal{E}) = \dim(V).$$

当 F 的特征等于 2 时, 上述结论是否成立? 请说明理由.