

2025年春季学期第十一周作业

1. 求下列实矩阵的所有特征值和特征向量:

$$(a) \begin{pmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

2. 设 λ_1, λ_2 是 n 阶方阵 A 的两个特征值, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ 是分别属于 λ_1, λ_2 的特征向量, 问: $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ 是 A 的特征向量吗? 并说明原因.

3. 设 \mathcal{A} 是有限维线性空间中的可逆线性算子. 证明:

(a) 0 不是 \mathcal{A} 的特征值.

(b) 若 λ 是 \mathcal{A} 的特征值, 则 λ^{-1} 是 \mathcal{A}^{-1} 的特征值且对应的特征向量相同.

4. 设 \mathcal{A} 是有限维线性空间中的可逆线性算子, $f \in F[t]$. 证明: 若 λ_0 是 \mathcal{A} 的一个特征值, 则 $f(\lambda_0)$ 为 $f(\mathcal{A})$ 的特征值; 若 \mathbf{x} 是 \mathcal{A} 关于 λ_0 的特征向量, 则 \mathbf{x} 也是 $f(\mathcal{A})$ 关于 $f(\lambda_0)$ 的特征向量, 即

$$f(\mathcal{A})(\mathbf{x}) = f(\lambda_0)(\mathbf{x}).$$