

2025年春季学期第十二周作业

1. 设 $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. 把 S 看成 $\mathbb{R}$ 上的矩阵是否能对角化? 看成 $\mathbb{C}$ 上的矩阵能否对角化? 请说明理由.

2. 设

$$\begin{aligned} \mathcal{D}: \mathbb{R}[x]^{(3)} &\longrightarrow \mathbb{R}[x]^{(3)} \\ f(x) &\longmapsto f'(x). \end{aligned}$$

求线性算子 $x\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}^2 + 2\mathcal{D} + \mathcal{E}$ 的所有特征根和特征向量, 并说明这两个线性算子中哪个是可对角化的, 哪个不是.

3. 设矩阵 $A, B \in M_n(F)$ 且 A 与 B 相似.

- (1) 证明: $\text{spec}_F(A) = \text{spec}_F(B)$ 且对于任意 $\lambda \in \text{spec}_F(A)$, $\dim V_A^\lambda = \dim V_B^\lambda$.
其中 V_A^λ, V_B^λ 分别表示矩阵 A, B 关于 λ 的特征子空间.
- (2) 设 $B = P^{-1}AP$, 其中 $P \in \text{GL}_n(F)$, $\mathbf{v}$ 是 A 的特征向量. 证明: $P^{-1}\mathbf{v}$ 是 B 的特征向量.

4. 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ 在标准基下的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

设 $\mathbf{v} = (1, 0, 1)^t$ 和 $\mathbf{w} = (1, 0, 0)^t$.

- (1) 计算 $\dim(\mathbb{R}[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{v})$ 和 $\dim(\mathbb{R}[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w})$.
- (2) 判断 $\mathbb{R}^3$ 是不是 $\mathcal{A}$ -循环的, 并说明理由.

5. 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 且 V 是 $\mathcal{A}$ -循环的. 再设 $U_1, U_2 \subset V$ 是 $\mathcal{A}$ -子空间满足

$$V = U_1 \oplus U_2.$$

证明: U_1 和 U_2 都是 $\mathcal{A}$ -循环子空间.