

2025年春季学期第十三周作业

1. 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

把 A^{-1} 和 A^4 表示为 A^0, A, A^2 和 A^3 的线性组合.

2. 设域 F 上 m 阶方阵 A 和 n 阶方阵 B 的特征多项式互素, 求证: $F^{m \times n}$ 上的线性变换 $\mathcal{A}: X \mapsto AX - XB$ 可逆.

3. 求 $\mathbb{C}$ 上三阶矩阵

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 7 & 25 \\ 0 & -2 & -7 \end{pmatrix}$$

的 Jordan 标准型.

4. 设复方阵 A 的特征多项式为

$$\chi_A = (t-1)^4(t+1)^3t^2,$$

极小多项式为

$$\mu_A = (t-1)^2(t+1)^3t.$$

再设 $\text{rank}(A - E) = 7$. 试计算 J_A .

5. (选做) 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$. 证明: $\text{tr}(A^k) = 0, k = 1, 2, \dots, n$ 当且仅当 A 是幂零矩阵.