

2025年春季学期第十四周作业

1. 计算下列二阶复矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_1\lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix}$$

的 Jordan 标准型 (提示: 需要对 λ_1, λ_2 的取值分情况讨论).

2. 设 A 是复数域上的方阵.

(a) 已知 $\chi_A(t) = (t-3)^4(t+2)$ 且 $\text{rank}(A-3E) = 2$. 求 J_A ;

(b) 在 $\text{rank}(A-3E) = 1, 3, 4$ 的情形, 能唯一地求出 J_A 吗?

3. 设 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$,

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) 验证矩阵 A 和 B 有相同的特征多项式;

(b) 求出它们的极小多项式;

(c) 计算它们的初等因子组;

(d) 求出它们的 Jordan 标准型.

4. 计算 $J_n(\lambda)$ 的极小多项式, 特征多项式和 $J_n(\lambda)^k$, 其中 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, k \in \mathbb{N}$.

5. 计算 $J_n(\lambda)^k$ 的 Jordan 标准型, 其中 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, k \in \mathbb{N}$.