2025年春季学期第十五周作业

1. 设 V 是 n 维欧式空间, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. 证明:

   (a) $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$.

   (b) 如果 $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$, 则 $(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \perp (\mathbf{u}-\mathbf{v})$.

   (c) $(\mathbf{u}|\mathbf{v}) = \frac{1}{4}\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \frac{1}{4}\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2$.

   (d) $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta$, ($\theta$ 为 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 的夹角).

2. 设 $V = \mathbb{R}[x]_{<n+1}$. 对于 $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^n b_j x^j$, 规定

$$(f|g) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \frac{a_i b_j}{i+j+1}.$$

   证明: $(\cdot|\cdot)$ 是 V 上的一个内积, 并求 Gram 矩阵 $\mathrm{G}(1, x, \ldots, x^n)$.

3. 设 V 是实内积空间, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. 证明: $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ 当且仅当对任意的实数 t,

$$\|\mathbf{x} + t\mathbf{y}\| \geq \|\mathbf{x}\|.$$

4. 设 V 是 n 维欧式空间, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 是 V 的一组基. 证明: 存在 V 的一组单位正交基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 和 n 阶上三角矩阵 T 使得

$$(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)T.$$

   (提示: 利用 Gram-Schmidt 正交化)