2025年春季学期第十六周作业

1. 设 W 是

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   在 $\mathbb{R}^4$ 中的解空间. 求 $W^\perp$ 的一组单位正交基.

2. 设 V 是欧式空间, $\mathbf{v}$ 是 V 的单位向量. 设

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{A}: & V & \longrightarrow & V \\ & \mathbf{x} & \mapsto & 2(\mathbf{x}|\mathbf{v})\mathbf{v} - \mathbf{x}. \end{array}$$

   (i) 证明: $\mathcal{A}$ 是线性算子.

   (ii) 证明: $\mathcal{A}$ 既是对称算子又是正交算子.

   (iii) 计算 $\mathcal{A}$ 的所有特征子空间的维数.

3. (i) 设 U_1, U_2 都是 V 的子空间, 且 $U_1 \subset U_2$. 证明: $U_2^\perp \subset U_1^\perp$;

   (ii) 设 U_1, U_2 都是 V 的子空间. 证明: $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$.

4. 设 $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ 是所有 n 阶正交矩阵关于乘法构成的群.

   (i) 令 $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$=$\{P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) | \det(P) = 1\}$. 证明: $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ 是 $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ 的子群;

   (ii) 设 $T \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ 是上三角的. 证明: T 是对角的.

5. 设 V 是 n 维欧氏空间, $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \in V$. 证明下列断言等价:

   (i) $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ 是 V 的一组单位正交基;

   (ii) 对任意的 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, (\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{x} \mid \mathbf{e}_i)(\mathbf{y} \mid \mathbf{e}_i)$;

   (iii) 对任意的 $\mathbf{x} \in V, \|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^n (\mathbf{x} \mid \mathbf{e}_i)^2$.