

2025年春季学期第十七周作业

1. 设实对称矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) 求正交矩阵 P, Q 与对角阵 C, D 使得 $P^t A P = C$ 和 $Q^t B Q = D$.

(b) 计算 $A^k, B^k, k \in \mathbb{Z}^+$.

2. 设 $A, B \in \text{SM}_n(\mathbb{R})$. $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ 为 A 的所有特征值, $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_n$ 为 B 的所有特征值, 证明:

(a) $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, 定义

$$R_A(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^t A \mathbf{x}}{\mathbf{x}^t \mathbf{x}},$$

则 $\min(R_A(\mathbf{x})) = \lambda_1$ 和 $\max(R_A(\mathbf{x})) = \lambda_n$.

(b) $A + B$ 的特征值均落在 $[\lambda_1 + \mu_1, \lambda_n + \mu_n]$ 之中.

3. 设 A 是 n 阶斜对称方阵. 证明: A^2 的特征值都是实数且小于等于 0.

4. 设 V 是一个奇数维内积空间. $\mathcal{A}$ 是 V 上的正交变换, $\det(A) = 1$, 其中 A 是 $\mathcal{A}$ 在 V 的某组基下的矩阵. 证明: $\mathcal{A}$ 有特征值 1.

注: 因为行列式是相似不变量, 所以 $\det(A)$ 的值与基底选取无关.

5. 设 $A, B \in \text{O}_n(\mathbb{R})$, $\det(A) + \det(B) = 0$. 证明: $A + B$ 不可逆.