第一章　空间与形式

8　二次型 (quadratic forms)

我们从对称双线性型的角度引入二次型, 这样可以使我们可以直接应用双线性型的结论. 然后我们说明二次型和二次齐次多项式之间的关系. 在本节中 V 是域 F 上的有限维线性空间, F 的特征不是 2.

8.1　从对称双线性型到二次型

定义 8.1 设 $q: V \longrightarrow F$ 称为 V 上的二次型, 如果

(i) 对于任意的 $\mathbf{v} \in V$, $q(\mathbf{v}) = q(-\mathbf{v})$;

(ii) 对于任意的 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$,

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(q(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - q(\mathbf{x}) - q(\mathbf{y}))$$

是 V 上的对称双线性型. f 称为 q 的配极.

注解 8.2 设 q 是 V 上的二次型. 则 $q(\mathbf{0}) = 0$. 这是因为在上述定义条件 *(ii)* 中代入 $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{0}$, 得到

$$0 = f(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = -\frac{1}{2}q(\mathbf{0}) \implies q(\mathbf{0}) = 0.$$

下面的命题说明二次型和配极之间的关系.

命题 8.3 设 $q: V\to F$. 则 q 是二次型当且仅当存在 $f\in\mathcal{L}_2^+(V)$ 使得 $\forall\ \mathbf{x}\in V$, $q(\mathbf{x})=f(\mathbf{x},\mathbf{x})$. 此时, q 的配极是 f.

证明. 设 q 是二次型. 由定义 8.1 中的 (ii) 和 (i) 可知.

$$\begin{aligned}&-f(\mathbf{x},\mathbf{x})=f(\mathbf{x},-\mathbf{x})\overset{(ii)}{=}\frac{1}{2}(q(\mathbf{0})-q(\mathbf{x})-q(-\mathbf{x}))\\&=-\frac{1}{2}(q(\mathbf{x})+q(-\mathbf{x}))\overset{(i)}{=}-q(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

于是, $q(\mathbf{x})=f(\mathbf{x},\mathbf{x})$.

反之, 直接计算得

$$q(-\mathbf{x})=f(-\mathbf{x},-\mathbf{x})=f(\mathbf{x},\mathbf{x})=q(\mathbf{x}).$$

由对称双线性型的极化公式定义 8.1 中 (ii) 成立. □

推论 8.4 设 q 是 V 上的二次型. 则对任意的 $\alpha\in F$ 和 $\mathbf{v}\in V$, $q(\alpha\mathbf{v})=\alpha^2q(\mathbf{v})$.

证明. 设 $f\in\mathcal{L}_2^+(V)$ 是 q 的配极. 由上述命题 (i),

$$q(\alpha\mathbf{x})=f(\alpha\mathbf{x},\alpha\mathbf{x})=\alpha^2f(\mathbf{x},\mathbf{x})=\alpha^2q(\mathbf{x}).\quad\square$$

定理 8.5 设 V 的一组基是 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$, q 是 V 上的二次型. 则存在唯一的矩阵 $A\in\mathrm{SM}_n(F)$ 使得对于任意的 $\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+\cdots+x_n\mathbf{e}_n$ 使得

$$q(\mathbf{x})=(x_1,\ldots,x_n)A\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}.$$

证明. 设 f 是 q 的配极, A 是 f 在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵. 则 $A \in \mathrm{SM}_n(F)$ 且对任意的 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$ 和 $\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + \cdots + y_n\mathbf{e}_n$, 我们有

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, \ldots, x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{命题 } 8.3} q(\mathbf{x}) = (x_1, \ldots, x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

存在性成立.

再设 $B \in \mathrm{SM}_n(F)$ 使得

$$q(\mathbf{x}) = (x_1, \ldots, x_n) B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

令

$$\begin{array}{rccc} g: & V \times V & \longrightarrow & F \\ & (\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \mapsto & (x_1, \ldots, x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \end{array}$$

可直接验证 $g \in \mathcal{L}_2^+(V)$. 因为 $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = q(\mathbf{x})$, 所以 g 是 q 的配极 (命题 8.3 (ii)) 且 B 是 g 在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵. 因为 $f = g$, 所以 $A = B$. 唯一性成立. $\square$

称矩阵 A 是二次型 q 在基底 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵. 进而, 配极 f 的秩称为 q 的秩, 记为 $\mathrm{rank}(q)$.

定理 8.6 设 V 的两组基是 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 和 $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$, 且

$$(\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)P,$$

其中 $P \in \mathrm{GL}_n(F)$. 设 V 上的二次型 q 在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵为 A, 在 $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ 下的矩阵为 B. 则 $B = P^tAP$.

证明. 设 f 是 q 的配极. 则 A 和 B 分别是 f 在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 和 $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ 下的矩阵. 故 $B = P^tAP$. □

定理 8.7 设 q 是 V 上的二次型. 则存在 V 的一组基 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 使得 q 在该基下的矩阵是对角阵. 再设该对角阵是 $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. 则对任意 $\mathbf{x} = x_1\epsilon_1 + \cdots + x_n\epsilon_n \in V$,

$$q(\mathbf{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2. \tag{1}$$

证明. 设 q 的配极是 f. 由上一节定理 7.12 得出, f 的规范基 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$. 于是 q 在该基下的矩阵是对角阵. 设该对角阵是 $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. 则对任意的 $\mathbf{x} = x_1\epsilon_1 + \cdots + x_n\epsilon_n$, $\mathbf{y} = y_1\epsilon_1 + \cdots + y_n\epsilon_n \in V$, $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda_1 x_1 y_1 + \cdots + \lambda_n x_n y_n$. 故 $q(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$. □

基于上述定理, 我们称 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 是 q 的一组规范基, (1) 是 q 的一个规范型.

由上一节推论 7.17 可知

推论 8.8 设 q 是 V 上的二次型且 $r=\operatorname{rank}(q)$. 则存在 q 的规范基 $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n$ 使得对任意 $\mathbf{x}=x_1\epsilon_1+\cdots+x_n\epsilon_n\in V$, $q(\mathbf{x})=\lambda_1x_1^2+\cdots+\lambda_rx_r^2$.

例 8.9 设 $p\in F[x_1,\ldots,x_n]$ 齐二次, 多项式函数 $p:F^n\to F$ 由公式 $p(\mathbf{v})=p(v_1,\ldots,v_n)$ 给出, 其中 $\mathbf{v}=(v_1,\ldots,v_n)^t$ 是 F^n 中的任意元素. 则 p 是 F^n 上的二次型.

证明. 因为 p 是齐二次的, 所以 $p=\sum_{1\le i\le j\le n}\alpha_{i,j}x_ix_j$. 令 $\beta_{i,i}=\alpha_{i,i}$, $i=1,2\ldots,n$, $\beta_{i,j}=\alpha_{i,j}/2$, $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$, 其中 $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$ 且 $i<j$. 而 $\beta_{j,i}=\beta_{i,j}$, 其中 $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$ 且 $i<j$. 则

$$
\begin{aligned}
p&=\sum_{i=1}^{n}\beta_{i,j}x_i^2+\sum_{i,j=1,i\neq j}^{n}\beta_{i,j}x_ix_j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\beta_{i,j}x_ix_j\\
&=(x_1,\ldots,x_n)\underbrace{\begin{pmatrix}\beta_{1,1}&\cdots&\beta_{1,n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ \beta_{n,1}&\cdots&\beta_{n,n}\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

由 $\beta_{i,j}$ 的定义可知, A 是对称的. 令 f 是在标准基下矩阵是 A 的对称双线性型. 则

$$f(\mathbf{v},\mathbf{v})=(v_1,\ldots,v_n)A(v_1,\ldots,v_n)^t=p(\mathbf{v}).$$

于是, p 是 F^n 上的二次型. 它在标准基下的矩阵等于 A.

由 $\beta_{i,j}$ 的定义可知,

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \frac{\alpha_{1,2}}{2} & \cdots & \frac{\alpha_{1,n}}{2} \\ \frac{\alpha_{1,2}}{2} & \alpha_{2,2} & \cdots & \frac{\alpha_{2,n}}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\alpha_{1,n}}{2} & \frac{\alpha_{2,n}}{2} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix}.$$

例 8.10 设 $p = x_2^2 - x_1x_2 + 4x_2x_3$. 求 p 在 $\mathbb{R}^3$ 的标准基下的矩阵和秩.

解. 由上例可知,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

由定义得出 $\operatorname{rank}(p) = \operatorname{rank}(A) = 2$.

8.2 配方法

我们用一个具体的例子说明如何用配方法把一个二次型化为它的规范型.

例 8.11 设 $p = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$. 求 $\mathbb{R}^3$ 上二次型 p 的一组规范基和一个规范型.

解. 设

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P_1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

则

$$\begin{aligned} p &= 2y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_1y_3 \\ &= 2(y_1^2 + 2y_1y_3 + y_3^2) - 2y_2^2 - 2y_3^2 \\ &= 2(y_1 + y_3)^2 - 2y_2^2 - 2y_3^2. \end{aligned}$$

设

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P_2} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

则 $p = 2z_1^2 - 2z_2^2 - 2z_3^2$. 注意到

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P_1P_2^{-1} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

设 A 是 p 在标准基下的矩阵. 则

$$p = (x_1, x_2, x_3)A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (z_1, z_2, z_3)\left(P_1P_2^{-1}\right)^t A(P_1P_2^{-1})\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

$$= (z_1, z_2, z_3)\mathrm{diag}(2, -2, -2)\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

于是, $A \sim_c \mathrm{diag}(2, -2, -2)$ 且规范基是

$$P_1P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

的三个列向量.

8.3 齐二次多项式的因式分解

命题 8.12 设 $p \in F[x_1, \ldots, x_n]$, 非零齐二次. 如果 p 可以分解为两个一次多项式之积, 则 p 作为 F^n 上的二次型的秩小于 3.

证明. 设 $p = fg$, 其中 f, g 是 $F[x_1, \ldots, x_n]$ 的齐一次多项式. 进而, 令

$$f = \alpha_1x_1 + \cdots + \alpha_nx_n, \quad g = \beta_1x_1 + \cdots + \beta_nx_n,$$

其中 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in F$ 不全为零, $\beta_1,\ldots,\beta_n\in F$ 也不全为零. 直接计算得 p 做为 F^n 上得二次型的矩阵是

$$
\begin{aligned}
A &= \left(\frac{\alpha_i\beta_j+\beta_i\alpha_j}{2}\right)_{n\times n}\\
&= \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}(\beta_1,\ldots,\beta_n)}_{B} + \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}_{C}.
\end{aligned}
$$

于是, $\mathrm{rank}(p)=\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B+C)\le\mathrm{rank}(B)+\mathrm{rank}(C)=2$ [1]. □

例 8.13 设 $f\in\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ 是齐二次的*(非零)*多项式. 则 f 可以分解为两个一次多项式之积当且仅当 f 作为二次型的秩小于 3.

证明. 根据上述命题, 只要证明 $\mathrm{rank}(f)<3$ 时, f 是两个齐一次多项式之积. 设

$$
f(x_1,\ldots,x_n)=(x_1,\ldots,x_n)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}.
$$

则 $A\in\mathrm{SM}_n(\mathbb{C})$. 根据上一讲例 *7.18*, 存在 $P\in\mathrm{GL}_n(F)$ 使

[1] $V_c(B+C)\subset V_c(B)+V_c(C)\implies\mathrm{rank}(B+C)\le\dim(V_c(B)+V_c(C))\le\dim(V_c(B))+\dim(V_c(C))=\mathrm{rank}(B)+\mathrm{rank}(C)$.

得

$$P^tAP = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

其中 $r = \mathrm{rank}(A)$. 令

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

其中 $Q = (q_{i,j}) = P^{-1}$. 则 $f(x_1, \dots x_n) = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_r^2$. 如果 $r = 1$, 则

$$f(x_1, \dots x_n) = y_1^2 = (q_{1,1}x_1 + \cdots + q_{1,n}x_n)^2.$$

如果 $r = 2$, 则

$$f(x_1, \dots, x_n) = y_1^2 + y_2^2 = (y_1 - \sqrt{-1}y_2)(y_1 + \sqrt{-1}y_2).$$

把 $y_1 = q_{1,1}x_1 + \cdots + q_{1,n}x_n$ 和 $y_2 = q_{2,1}x_1 + \cdots + q_{2,n}x_n$ 带入上式得到 f 的因式分解.

9 实二次型

在本节中, V 是 $\mathbb{R}$ 上的 n 维线性空间, V 上所有二次型的集合记为 $\mathcal{Q}(V)$.

9.1 惯性定理

定理 9.1 *(Sylvester)* 设 q 是 V 上的二次型. 则存在 q 的一组规范基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 使得在该基下 q 的矩阵为

$$\begin{pmatrix} E_k & O & O \\ O & -E_\ell & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

且 $k + \ell = \mathrm{rank}(q)$. 进而, 如果 q 在另一组规范基下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} E_s & O & O \\ O & -E_t & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

则 $s = k$ 和 $t = \ell$.

证明. 设 $r = \mathrm{rank}(q)$. 由上一节推论 7.17 及其证明可知, 存在 q 的一组基使得 q 在该基下的矩阵是

$$A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r, 0, \ldots, 0),$$

其中 $r = \mathrm{rank}(q)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. 适当调整基底中元素的顺序, 我们可进一步设

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}^+, \quad \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_{k+\ell} \in \mathbb{R}^-, \quad \text{且} \quad k + \ell = r.$$

令 P 为 n 阶可逆矩阵

$$\mathrm{diag}\left((\sqrt{\lambda_1})^{-1}, \ldots, (\sqrt{\lambda_k})^{-1}, (\sqrt{-\lambda_{k+1}})^{-1}, \ldots, (\sqrt{-\lambda_{k+\ell}})^{-1}, 1, \ldots, 1 \right).$$

则

$$P^tAP = \begin{pmatrix} E_k & O & O \\ O & -E_\ell & O \\ O & O & O \end{pmatrix}.$$

设 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 是两组 q 的规范基, 所对应的矩阵分别是

$$B = \begin{pmatrix} E_k & O & O \\ O & -E_\ell & O \\ O & O & O \end{pmatrix} \quad 和 \quad C = \begin{pmatrix} E_s & O & O \\ O & -E_t & O \\ O & O & O \end{pmatrix}.$$

设 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n = y_1\epsilon_1 + \cdots + y_n\epsilon_n$. 则

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_r^2 = y_1^2 + \cdots + y_s^2 - y_{s+1}^2 - \cdots - y_r^2.$$

假设 $k > s$. 则 $\ell < t$. 这是因为 $k + \ell = s + t = r$. 令 $U = \langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k \rangle$, $W = \langle \epsilon_{s+1}, \ldots, \epsilon_n \rangle$. 则

$$\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U + W) \geq k + n - s - n = k - s > 0.$$

于是由非零向量 $\mathbf{v} \in U \cap W$. 由 U 和 W 的生成元可知, 存在 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, 不全为零, 和 $\beta_{s+1}, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ 使得

$$\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{e}_k = \beta_{s+1}\epsilon_{s+1} + \cdots + \beta_n\epsilon_n.$$

于是

$$q(\mathbf{v}) = \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_k^2 > 0 \quad 且 \quad q(\mathbf{v}) = -\beta_{s+1}^2 - \cdots - \beta_r^2 \leq 0.$$

矛盾. □

利用上述定理中的记号, 我们有如下定义.

定义 9.2 称 k 是 q 的正惯性指数, ℓ 是 q 的负惯性指数, (k,ℓ) 是 q 的签名.

上述定理的矩阵版如下.

推论 9.3 设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$. 则存在 $k,\ell \in \mathbb{N}$ 使得

$$A \sim_c \begin{pmatrix} E_k & O & O \\ O & -E_\ell & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

且 $k+\ell = \mathrm{rank}(q)$. 进而, 如果

$$A \sim_c \begin{pmatrix} E_s & O & O \\ O & -E_t & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

则 $k = s$ 和 $t = \ell$.

利用上述推论中的记号, 我们由如下定义.

定义 9.4 称 k 是 A 的正惯性指数, ℓ 是 A 的负惯性指数, (k,ℓ) 是 A 的签名.

推论 9.5 设 $A, B \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$. 则 $A \sim_c B$ 当且仅当 A 和 B 有共同的签名.

证明. 设 A 的签名是 (k,ℓ), B 的签名是 (s,t).

如果 $A\sim_c B$, 则由 $\sim_c$ 的传递律和对称律得出

$$A\sim_c \begin{pmatrix} E_k & O & O\\ O & -E_\ell & O\\ O & O & O\end{pmatrix} \Longrightarrow B\sim_c \begin{pmatrix} E_k & O & O\\ O & -E_\ell & O\\ O & O & O\end{pmatrix}.$$

根据推论 9.3, (k,ℓ) 也是 B 的签名.

反之，设 $(k,\ell)=(s,t)$. 则

$$A\sim_c \begin{pmatrix} E_k & O & O\\ O & -E_\ell & O\\ O & O & O\end{pmatrix} \quad 和 \quad B\sim_c \begin{pmatrix} E_k & O & O\\ O & -E_\ell & O\\ O & O & O\end{pmatrix}.$$

因为 $\sim_c$ 是等价关系, 所以 $A\sim_c B$. □

例 9.6 设

$$\begin{aligned} q:\ \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}\\ A &\mapsto \mathrm{tr}(A^2). \end{aligned}$$

证明 q 是二次型并求其签名.

证明. 设 $A=(a_{i,j})$. 则

$$q(A)=\mathrm{tr}(A^2)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{i,j}a_{j,i}=\sum_{i=1}^n a_{i,i}^2+\sum_{1\le i<j\le n}2a_{i,j}a_{j,i}.$$

于是, q 是二次型. 考虑可逆坐标变换

$$z_{i,i}=a_{i,i},\ i=1,2,\ldots,n, \quad 和 \quad a_{i,j}=z_{i,j}+z_{j,i},\ a_{j,i}=z_{i,j}-z_{j,i},$$

其中 $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}, i < j$. 则

$$q = \sum_{i=1}^{n} z_{i,i}^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} 2(z_{i,j}^2 - z_{j,i}^2).$$

于是, q 的正惯性指数是

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

而负惯性指数是

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

从而 q 的签名为

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2}\right)$$

9.2 （半）正定二次型

定义 9.7 设 q 是 V 上的二次型.

(i) 如果对于任意 $\mathbf{x} \in V$, $q(\mathbf{x}) \geq 0$, 则称 q 是半正定的 *(semi-positive definite);*

(ii) 如果对于任意 $\mathbf{x} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$, $q(\mathbf{x}) > 0$, 则称 q 是正定的 *(positive definite);*

(iii) 如果对于任意 $\mathbf{x} \in V$, $q(\mathbf{x}) \leq 0$, 则称 q 是半负定的 *(semi-negative definite);*

(iv) 如果对于任意 $\mathbf{x} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$, $q(\mathbf{x}) < 0$, 则称 q 是负定的 *(negative definite)*;

(v) 如果 q 既不是半正定也不是半负定的, 则称 q 是不定的 *(indefinite)*.

设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$, q_A 是 $\mathbb{R}^n$ 上在标准基下矩阵为 A 的二次型. 如果 q_A 是半正定(正定的, 半负定的, 负定的, 不定的), 则称 A 是半正定(正定的, 半负定的, 负定的, 不定的).

命题 9.8 设 $\dim(V) = n$ 且 q 是 V 上的二次型. 它的签名是 (k, ℓ).

(i) q 是半正定的当且仅当 $\ell = 0$;

(ii) q 是正定的当且仅当 $k = n$;

(iii) q 是半负定的当且仅当 $k = 0$;

(iv) q 是负定的当且仅当 $\ell = n$;

(v) q 是不定的当且仅当 $k > 0$ 且 $\ell > 0$.

证明. 设 q 在规范基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的规范型是

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+\ell}^2,$$

其中 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$ 是 V 中的任意向量.

(i) 若 $\ell=0$, 则 $q(\mathbf{x})=x_1^2+\cdots+x_k^2\geq 0$. 即 q 半正定. 反之, 假设 $\ell>0$. 令 $\mathbf{x}=\mathbf{e}_{k+1}$. 则 $q(\mathbf{x})=-1<0$. 矛盾. 故 $\ell=0$.

(ii) 若 $k=n$, 则 $q(\mathbf{x})=x_1^2+\cdots+x_n^2$. 于是, 当 $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ 时, $q(\mathbf{x})>0$, 即 q 正定. 反之, 假设 $k<n$. 令 $\mathbf{x}=\mathbf{e}_n$. 则 $q(\mathbf{e}_n)=0$. 于是 q 不是正定的. 矛盾.

(iii) 与 (i) 类似.

(iv) 与 (ii) 类似.

(v) 排除 (i), (iii) 情形即可. □

注解 9.9 半正定, 正定, 半负定, 负定和不定二次型分别有下列规范型

$$x_1^2+\cdots+x_k^2,\quad x_1^2+\cdots+x_n^2,\quad -x_1^2-\cdots-x_\ell^2,\quad -x_1^2-\cdots-x_n^2,$$

和

$$x_1^2+\cdots+x_k^2-x_{k+1}^2-\cdots-x_{k+\ell}^2,$$

在最后的规范型中 $k>0,\ell>0$.

类似地, 我们有

命题 9.10 设 $A\in\mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$. 它的签名是 (k,ℓ).

(i) A 是半正定的当且仅当 $\ell=0$;

(ii) A 是正定的当且仅当 $k=n$;

(iii) A 是半负定的当且仅当 $k=0$;

(iv) A 是负定的当且仅当 $\ell = n$;

(v) A 是不定的当且仅当 $k > 0$ 且 $\ell > 0$.