

第二章 线性算子

根据命题 7.2 非零 $\mathbf{v}$ 是 $\mathcal{A}$ 特征向量当且仅当存在 $\lambda \in F$ 使得 $\mathcal{A}(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$. 我们称 λ 是关于特征向量 $\mathbf{v}$ 的特征值 (eigenvalue). 简称 $\mathcal{A}$ 的特征值. 反之, 设 $\lambda \in F$ 是 $\mathcal{A}$ 的特征值. 令

$$V^\lambda = \{\mathbf{x} \in V \mid \mathcal{A}(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}\}$$

称为 $\mathcal{A}$ 关于 λ 的特征子空间 (eigenspace). 下面我们来验证 V^λ 是 $\mathcal{A}$ -子空间.

设 $\alpha, \beta \in F, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V^\lambda$. 则

$$\mathcal{A}(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha\mathcal{A}(\mathbf{x}) + \beta\mathcal{A}(\mathbf{y}) = \alpha\lambda\mathbf{x} + \beta\lambda\mathbf{y} = \lambda(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}).$$

由此可知 $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in V^\lambda$. 即 V^λ 是子空间. 因为

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x} \in V^\lambda,$$

所以 V^λ 是 $\mathcal{A}$ 不变的.

例 7.4 设 $\mathcal{A} = \lambda\mathcal{E}$, $\lambda \in F$. 则 $\mathcal{A}$ 的唯一特征值是 λ 且 $V^\lambda = V$.

设 $\mathcal{A} = \mathcal{A}^2$ 且 $\mathcal{A}$ 既不等于 $\mathcal{E}$ 也不等于 $\mathcal{O}$. 则 $\mathcal{A}$ 不可逆. 故 0 是它的特征值且 $V^0 = \ker(\mathcal{A})$.

再设 $\lambda \in F \setminus \{0\}$ 是 $\mathcal{A}$ 的特征值和 $\mathbf{v}$ 是其对应的特征向量. 则 $\mathcal{A}(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ 故 $\mathcal{A}^2(\mathbf{v}) = \lambda\mathcal{A}(\mathbf{v})$. 因为 $\mathcal{A} = \mathcal{A}^2$,

所以 $\lambda \mathbf{v} = \lambda^2 \mathbf{v}$. 故 $\lambda = 1$. 可直接验证 $\text{im}(\mathcal{A})$ 中关于的非零向量都是关于 1 的特征向量. 因为 $\mathcal{A} \neq \mathcal{O}$, 所以 $\text{im}(\mathcal{A}) \neq \{\mathbf{0}\}$. 故 1 是 $\mathcal{A}$ 的特征值且 $\text{im}(\mathcal{A}) \subset V^1$. 而 $V^1 \subset \text{im}(\mathcal{A})$ 是显然的. 故 $V^1 = \text{im}(\mathcal{A})$.

设 $k \in \mathbb{Z}^+$ 使得 $\mathcal{A}^k = \mathcal{O}$ 且 $\mathcal{A} \neq \mathcal{O}$. 因为 $\mathcal{A}$ 不可逆, 所以 0 是 $\mathcal{A}$ 的特征值且 $V^0 = \ker(\mathcal{A})$. 再设 $\lambda \in F \setminus \{0\}$ 是 $\mathcal{A}$ 的特征值和 $\mathbf{v}$ 是其对应的特征向量. 则 $\mathcal{A}^k(\mathbf{v}) = \lambda^k \mathbf{v} = \mathbf{0}$. 故 $\lambda = 0$, 矛盾. 由此可知, 0 是 $\mathcal{A}$ 唯一的特征值且对应的特征子空间是 $V^0 = \ker(\mathcal{A})$.

当我们把矩阵 $A \in M_n(F)$ 看成 $\mathcal{L}(F^n)$ 中由 $A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ 定义得线性算子时, 我们同样有矩阵 A 的特征向量, 特征值和特征子空间的概念.

7.2 特征多项式

设 $A \in M_n(F)$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^t \in F^n \setminus \{\mathbf{0}\}$. 则存在 $\lambda \in F$ 使得 $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, 即 $\mathbf{x}$ 是 A 的特征向量, 当且仅当

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \iff (\lambda E - A) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

由此推出 $\mathbf{x}$ 是 A 的特征向量蕴含 $\det(\lambda E - A) = 0$.

定义 7.5 设 $A \in M_n(F)$, t 是 F 上的未定元. 多项式

$$\det(tE - A) \in F[t]$$

称为 A 的特征多项式, 记为 $\chi_A(t)$.

定义 7.6 设 $A \in M_n(F)$. 特征多项式 χ_A 在 F 中的根称为 A 的特征根 (*eigenroots*). 这些特征根的集合记为 $\text{spec}_F(A)$, 称为 A 在 F 中的谱 (*spectrum*).

矩阵的特征根就是矩阵的特征值.

例 7.7 设实二阶矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

求 A 和 B 的所有特征根和特征向量.

解. 直接计算得

$$\chi_A(t) = \det(tE - A) = \det \begin{pmatrix} t & -1 \\ -1 & t \end{pmatrix} = t^2 - 1$$

和

$$\chi_B(t) = \det(tE - B) = \det \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix} = t^2 + 1.$$

于是, $\text{spec}_{\mathbb{R}}(A) = \{1, -1\}$, $\text{spec}_{\mathbb{R}}(B) = \emptyset$. 从而 B 没有实特征根, 从而没有特征向量和特征子空间.

设特征根 $\lambda_1 = 1$. 它对应的特征子空间是方程组

$$(\lambda_1 E - A) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

的解空间. 即方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

的解空间. 解方程组得 $V^{\lambda_1} = \langle (1, 1)^t \rangle$. 类似地, 特征根 $\lambda_2 = -1$ 对应的特征子空间是 $V^{\lambda_2} = \langle (1, -1)^t \rangle$.

例 7.8 设上例中矩阵 B 是复矩阵. 求它的特征值和特征向量.

解. 由上例可知,

$$\chi_B(t) = t^2 + 1.$$

于是, $\text{spec}_{\mathbb{C}}(B) = \{\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}\}$. 设特征根 $\lambda_1 = \sqrt{-1}$. 它对应的特征子空间是方程组

$$(\lambda_1 E - A) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

的解空间. 即方程组

$$\begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 1 \\ -1 & \sqrt{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

的解空间. 解方程组得 $V^{\lambda_1} = \langle (1, -\sqrt{-1})^t \rangle$. 类似地, 特征根 $\lambda_2 = -\sqrt{-1}$ 对应的特征子空间是 $V^{\lambda_2} = \langle (1, \sqrt{-1})^t \rangle$.

设 $\chi_A(t) = \det(tE - A) \in F[t]$. 则 $\mathbf{x}$ 是 $\mathcal{A}$ 的特征向量蕴含着它对应的特征值 λ 是 $\chi_A(t)$ 的根. 反之, 设 $\lambda \in F$ 是 $\chi_A(t)$ 的根. 则方程组

$$(\lambda E - A) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

由非零解 $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. 于是, $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{e}_n$ 满足 $\mathcal{A}(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$. 由此推出 $\lambda \in F$ 是 $\chi_A(t)$ 的根当且仅当 λ 是 $\mathcal{A}$ 的特征值.

定义 7.9 设 $A \in M_n(F)$, t 是 F 上的未定元. 多项式

$$\det(tE - A) \in F[t]$$

称为 A 的特征多项式, 记为 $\chi_A(t)$.

命题 7.10 矩阵特征多项式是相似不变量.

证明. 设 $A, B \in M_n(F)$ 且 $A \sim_s B$. 则存在 $P \in GL_n(F)$ 使得 $B = P^{-1}AP$. 直接计算得

$$\det(tE - B) = \det(tE - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}(tE - A)P) = \det(tE - A).$$

即 $\chi_A = \chi_B$. $\square$

定义 7.11 设 $A \in M_n(F)$. 特征多项式 χ_A 在 F 中的根称为 A 的特征根 (*eigenroots*). 这些特征根的集合记为 $\text{spec}_F(A)$, 称为 A 在 F 中的谱 (*spectrum*).

矩阵的特征根就是矩阵的特征值. 由命题 7.10 可知, $\text{spec}_F(A)$ 也是相似不变量.

命题 7.12 设 $A \in M_n(F)$,

$$\chi_A = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1t + a_0, \quad a_i \in F.$$

则 $a_{n-1} = -\text{tr}(A)$ 和 $a_n = (-1)^n \det(A)$. 特别地, A 可逆当且仅当 0 不是 A 的特征根.

证明. 设 $A = (a_{i,j})_{n \times n}$. Note that

$$\chi_A = \det \begin{pmatrix} t - a_{1,1} & -a_{1,2} & \cdots & -a_{1,n} \\ -a_{2,1} & t - a_{2,2} & \cdots & -a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n,1} & -a_{n,2} & \cdots & t - a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

故 $\chi_A = (t - a_{1,1})(t - a_{2,2}) \cdots (t - a_{n,n}) + p$, 其中 $\deg(p) < n - 1$. 于是 $\chi_A = t^n - \text{tr}(A)t^{n-1} + q$, 其中 $\deg(q) < n - 1$. 因为 $\chi_A(0) = \det(-A)$, 所以 $a_n = (-1)^n \det(A)$. 进而, $\chi_A(0) \neq 0$ 当且仅当 $\det(A) \neq 0$, 即 A 可逆. $\square$

定义 7.13 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基, $\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵等于 A . 则 $\det(tE - A)$ 称为 $\mathcal{A}$ 的特征多项式 (*characteristic polynomial*), 记为 $\chi_{\mathcal{A}}$. 特征多项式 $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ 在 F 中所有根的集合记为 $\text{spec}_F(\mathcal{A})$, 称为 $\mathcal{A}$ 的在 F 中的谱 (*spectrum*)

本节中关于矩阵特征向量和特征值的结果可以翻译成算子的语言, 表述如下设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$.

1. $\chi_{\mathcal{A}}$ 是良定义的 (命题 7.10).
2. $\chi_{\mathcal{A}}$ 是次数为 $\dim(V)$ 的首一多项式, $\mathcal{A}$ 可逆当且仅当 $\chi_{\mathcal{A}}(0) \neq 0$. (命题 7.12)

下面我们描述定义 7.13 中 $\mathcal{A}$ 与 A 特征向量之间的关系. 设 $\mathbf{v} \in V \setminus \mathbf{0}$ 且

$$\mathbf{v} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

则 $\mathbf{v}$ 是关于特征值 λ 的特征向量当且仅当

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v} &\iff (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \lambda (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \\ &\iff A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

故 $\mathbf{v}$ 是 $\mathcal{A}$ 关于 λ 的特征向量当且仅当其坐标是 A 关于 λ 的特征向量. 由此可知, 计算线性算子的特征值和特征向量的问题可以转化为计算其矩阵表示的特征值和特征向量的问题.

命题 7.14 设 V 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的线性空间, $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 则 $\mathcal{A}$ 一定有特征向量.

证明. 因为 $\chi_{\mathcal{A}} \in \mathbb{C}[t] \setminus \mathbb{C}$, 所以 $\chi_{\mathcal{A}}$ 在 $\mathbb{C}$ 中至少有一个根 λ (代数学基本定理). 即 $\mathcal{A}$ 有特征根. 于是有特征向量. $\square$

例 7.15 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$. 证明: A 相似于一个上三角矩阵.

证明. 对 n 归纳. 当 $n = 1$ 时, 结论显然成立. 设 $n > 1$ 且 $n - 1$ 时结论成立.

考虑 $A \in M_n(\mathbb{C})$. 把 A 看成 $\mathbb{C}^n$ 上在标准基 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 下矩阵等于 A 的线性算子. 由上例可知, A 有一个 1 维 $\mathcal{A}$

子空间 $\langle \mathbf{u} \rangle$. 根据第二章第二讲命题 5.3,

$$A \sim_s \begin{pmatrix} \lambda & * \\ O_{(n-1) \times 1} & B \end{pmatrix},$$

其中 $\lambda \in \mathbb{C}$, $B \in M_{n-1}(\mathbb{C})$. 根据归纳假设. 存在 $P \in \text{GL}_{n-1}(\mathbb{C})$ 使得 $P^{-1}BP$ 是上三角的. 令

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & O_{1 \times (n-1)} \\ O_{(n-1) \times 1} & P \end{pmatrix}.$$

则 P 可逆且

$$\begin{aligned} & Q^{-1} \begin{pmatrix} \lambda & * \\ O_{(n-1) \times 1} & B \end{pmatrix} Q \\ &= \begin{pmatrix} 1 & O_{1 \times (n-1)} \\ O_{(n-1) \times 1} & P^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & * \\ O_{(n-1) \times 1} & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & O_{1 \times (n-1)} \\ O_{(n-1) \times 1} & P \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & * \\ O_{(n-1) \times 1} & P^{-1}BP \end{pmatrix}}_T. \end{aligned}$$

因为 $P^{-1}BP$ 已经是上三角矩阵, 所以 T 也是上三角矩阵.

显然, $A \sim_s T$. $\square$

例 7.16 设 $A \in M_n(F)$ 是如下分块上三角形

$$\begin{pmatrix} A_1 & * & * & \cdots & * \\ O & A_2 & * & \cdots & * \\ O & O & A_3 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & * \\ O & O & O & \cdots & A_k \end{pmatrix}.$$

证明: $\chi_A = \chi_{A_1} \cdots \chi_{A_k}$.

证明. 由定义可知:

$$\begin{aligned} \chi_A(t) &= \det(tE - A) \\ &= \det \begin{pmatrix} tE_{n_1} - A_1 & * & * & \cdots & * \\ O & tE_{n_2} - A_2 & * & \cdots & * \\ O & O & tE_{n_3} - A_3 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & * \\ O & O & O & \cdots & tE_{n_k} - A_k \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

其中 A_i 是 n_i 阶方阵, $i = 1, 2, \dots, k$. 于是,

$$\chi_A(t) = \prod_{i=1}^k \det(tE_{n_i} - A_i) = \prod_{i=1}^k \chi_{A_i}(t). \quad \square$$