

第二章 线性算子

10.2 Hamilton-Cayley 定理

定理 10.4 (*Hamilton-Cayley 定理*) 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 则

(i) $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$, 即 $\mu_{\mathcal{A}}(t) | \chi_{\mathcal{A}}(t)$;

(ii) $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ 在 $F[t]$ 中的不可约因子都是 $\mu_{\mathcal{A}}(t)$ 的因子.

证明. 由循环子空间分解定理, $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_{\ell}$, 其中 $U_1, \dots, U_{\ell}$ 是非零的 $\mathcal{A}$ -循环子空间. 特别地, $U_1, \dots, U_{\ell}$ 是 $\mathcal{A}$ -不变的(命题 9.2 (ii)). 令 $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}|_{U_i}$, $\mu_i = \mu_{\mathcal{A}_i}$, $\chi_i = \chi_{\mathcal{A}_i}$, $i = 1, 2, \dots, \ell$. 根据定理 4.10, $\mathcal{A}$ 在某组基下的矩阵是:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & A_{\ell} \end{pmatrix}.$$

且 $\mu_{\mathcal{A}} = \text{lcm}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{\ell})$. 由例 7.14, $\chi_{\mathcal{A}} = \chi_1 \chi_2 \cdots \chi_{\ell}$. 由定理 10.2, $\mu_i = \chi_i$, $i = 1, 2, \dots, \ell$. 故上式可以写为

$$\chi_{\mathcal{A}} = \mu_1 \mu_2 \cdots \mu_{\ell}. \quad (1)$$

于是, $\mu_{\mathcal{A}}(t) | \chi_{\mathcal{A}}(t)$. (i) 成立.

(ii) 由 (i) 和 $\mu_{\mathcal{A}} = \text{lcm}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{\ell})$ 可得. $\square$

注解 10.5 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\mu_{\mathcal{A}} = p_1^{m_1} \cdots p_s^{m_s}$ 是 $\mu_{\mathcal{A}}$ 在 $F[t]$ 中的不可约分解. 则 $\chi_{\mathcal{A}}$ 在 $F[t]$ 中的不可约分解是

$$\chi_{\mathcal{A}} = p_1^{n_1} \cdots p_s^{n_s},$$

其中 $m_1 \leq n_1, \dots, m_s \leq n_s$ 且 $n_1 + \cdots + n_s = n$.

推论 10.6 (*Hamilton-Cayley* 定理之矩阵版) 设 $A \in M_n(F)$. 则 (i) $\mu_A(t) | \chi_A(t)$; (ii) $\chi_A(t)$ 在 $F[t]$ 中的不可约因子都是 $\mu_A(t)$ 的因子.

例 10.7 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

计算 $B = -A^3 + 4A^2 + 5A - 2E$.

解. 设 $f(t) = -t^3 + 4t^2 + 5t - 2$. 计算得

$$\chi_A(t) = (t-1)^2(t-2) = t^3 - 4t^2 + 5t - 2.$$

由多项式带余除法得: $f(t) = -\chi_A(t) + 10t - 4$. 由 *Hamilton-*

Cayley 定理, $B = 10A - 4E = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 20 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$

例 10.8 设 $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 14 & -8 \end{pmatrix}$. 计算 A^{66} .

解. 计算得 $\chi_A(t) = t^2 + t$. 由 *Hamilton-Cayley* 定理,

$$A^2 = -A.$$

于是,

$$\begin{aligned} A^{66} &= (A^2)^{33} = -A^{33} = -AA^{32} = -AA^{16} \\ &= -AA^8 = -AA^4 = -AA^2 = (-A)(-A) = A^2 = -A. \end{aligned}$$

我们得到 $A^{66} = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -14 & 8 \end{pmatrix}$. $\square$

另解. 由对角化可知, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, 其中 $P = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$.

于是, $P^{-1}A^{66}P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 故 $A^{66} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -14 & 8 \end{pmatrix}$.

10.3 不可分子空间的结构

引理 10.9 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, U 是 $\mathcal{A}$ -子空间. 则 U 是 $\mathcal{A}$ -不可分的当且仅当下述条件都成立.

(i) U 是 $\mathcal{A}$ -循环子空间;

(ii) $\mu_{\mathcal{A}_U}$ 是 $F[t]$ 中某个不可约多项式的幂次.

证明. 设 U 是 $\mathcal{A}$ -不可分子空间. 则 U 是 $\mathcal{A}$ -子空间. 根据定理 9.5, U 是若干 $\mathcal{A}_U$ -循环子空间的直和, 也是若干 $\mathcal{A}$ -循

环子空间的直和. 因为 U 是 $\mathcal{A}$ -不可分子空间, 所以直和项只有一个, 即 U 是 $\mathcal{A}$ -循环的. 进而, $\mu_{\mathcal{A}U}$ 是 $F[t]$ 中某个不可约多项式的幂次. 否则, 由核分解定理可知, U 关于 $\mathcal{A}_U$ 的核分解的直和项不止一个, 与 U 是 $\mathcal{A}$ -不可分子空间矛盾.

反之, 设条件 (i) 和 (ii) 满足. 设 $\mu_{\mathcal{A}U} = p^m$, 其中 $p \in F[t]$ 不可约, $m > 0$. 因为 U 是 $\mathcal{A}$ -循环子空间, 所以 U 是 $\mathcal{A}_U$ -循环空间. 由第二章第四讲引理 9.5,

$$\dim(U) = m \deg(p).$$

假设 $U = U_1 \oplus U_2$, 其中 U_1, U_2 是正维数的 $\mathcal{A}$ -子空间. 则它们也是 $\mathcal{A}_U$ -子空间. 则 $\mu_{\mathcal{A}U_1} | p^m$ 且 $\mu_{\mathcal{A}U_2} | p^m$ (命题 4.4). 但 $p^m = \text{lcm}(\mu_{\mathcal{A}U_1}, \mu_{\mathcal{A}U_2})$ (定理 4.10). 于是, $\mu_{\mathcal{A}U_1}, \mu_{\mathcal{A}U_2}$ 至少有一个等于 p^m . 不妨设 $\mu_{\mathcal{A}U_1} = p^m$, 根据 Hamilton-Cayley 定理, $\chi_{\mathcal{A}U_1}$ 有因子 p^k , 其中 $k \geq m$. 于是,

$$\dim(U_1) \geq m \deg(p) = \dim(U).$$

矛盾. $\square$

定理 10.10 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 则存在 $\mathcal{A}$ -不可分子空间 $W_1, \dots, W_k$ 使得 $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ 且 W_i 是 $\mathcal{A}$ -循环的, $\mu_{\mathcal{A}W_i}$ 是 $F[t]$ 中某个不可约多项式的幂次, $i = 1, 2, \dots, k$.

证明. 结合引理 10.9 和命题 5.2 即可. $\square$

11 $\mathbb{C}$ 上的 Jordan 标准型 (存在性)

记号: 在本节中 V 是 $\mathbb{C}$ 上的 n 维线性空间.

引理 11.1 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 则 V 是 $\mathcal{A}$ -不可分的当且仅当存在 $\lambda \in \mathbb{C}$ 使得 $\mu_{\mathcal{A}} = (t - \lambda)^n$. 此时, $\mathcal{A}$ 在 V 的某组基下的矩阵是

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}. \quad (2)$$

证明. 设 $\mu_{\mathcal{A}} = (t - \lambda)^n$. 则 V 是 $\mathcal{A}$ -循环的 (上一讲定理 9.11, 即循环空间判别法). 由不可分子空间判别法(上一讲引理 9.13) 可知, V 是 $\mathcal{A}$ -不可分的. 反之, 设 V 是 $\mathcal{A}$ -不可分的. 同样的引理蕴含 $\mu_{\mathcal{A}}$ 是 $\mathbb{C}[t]$ 中某个首一的不可约多项式的幂次. 由代数学基本定理, $\mu_{\mathcal{A}} = (t - \lambda)^m$, 其中 $\lambda \in \mathbb{C}$ 且 $m \in \mathbb{Z}^+$. 该引理还蕴含 V 是 $\mathcal{A}$ -循环的. 于是 $m=n$ (第二章第四讲定理 9.11).

设 V 是 $\mathcal{A}$ -不可分的, $V = F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{v}$ 且 $\mu_{\mathcal{A}} = (t - \lambda)^n$.

断言. 令 $\epsilon_j = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{n-j}(\mathbf{v})$, $j = 1, 2, \dots, n$, 是 V 的一组基.

断言的证明. 只要证明 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ 线性无关即可.

设 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ 使得 $\alpha_1\epsilon_1 + \dots + \alpha_n\epsilon_n = \mathbf{0}$. 则

$$\alpha_1(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{n-1}(\mathbf{v}) + \dots + \alpha_{n-1}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})(\mathbf{v}) + \alpha_n\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

令 $f(t) = \alpha_1(t-\lambda)^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1}(t-\lambda) + \alpha_n$. 则 $f(\mathcal{A})(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

设 $\mathbf{x} \in V$. 则存在 $g(t) \in \mathbb{C}[t]$ 使得 $\mathbf{x} = g(\mathcal{A})(\mathbf{v})$ (第二章第四讲命题 9.2 (i)). 于是,

$$f(\mathcal{A})(\mathbf{x}) = f(\mathcal{A})g(\mathcal{A})(\mathbf{v}) = g(\mathcal{A})f(\mathcal{A})(\mathbf{v}) = g(\mathcal{A})(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

由 $\mathbf{x}$ 的任意性可知, $f(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$. 因为 $\deg(f) < n$, 所以 $f(t) = 0$. 通过分析 f 的次数, 我们得到

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

断言成立.

下面我们计算 $\mathcal{A}$ 在 V 的基底 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ 下的矩阵. 设 $j = 2, \dots, n$. 则

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\epsilon_j) &= (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E} + \lambda\mathcal{E})(\epsilon_j) = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})((\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{n-j}(\mathbf{v})) + \lambda\mathcal{E}(\epsilon_j) \\ &= (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{n-j+1}(\mathbf{v}) + \lambda\epsilon_j = \epsilon_{j-1} + \lambda\epsilon_j. \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\epsilon_1) &= (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E} + \lambda\mathcal{E})(\epsilon_1) = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})((\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{n-1}(\mathbf{v})) + \lambda\mathcal{E}(\epsilon_1) \\ &= (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^n(\mathbf{v}) + \lambda\epsilon_1 = \lambda\epsilon_1. \end{aligned}$$

于是

$$\mathcal{A}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}. \quad \square.$$

我们称 (2) 中的矩阵为 关于 λ 的 n 阶 *Jordan* 块.

Jordan 块的若干基本性质如下.

注解 11.2

- (i) 如果 $\lambda \neq 0$, 则 $\text{rank}(J_n(\lambda)) = n$. 而 $\text{rank}(J_n(0)) = n-1$;
- (ii) $J_n(\lambda) = \lambda E_n + J_n(0)$;
- (iii) $J_n(\lambda)$ 的极小和特征多项式都等于 $(t - \lambda)^n$; 从而把 $J_n(\lambda)$ 看成 $\mathbb{C}^n$ 上的算子后, $\mathbb{C}^n$ 是 $J_n(\lambda)$ -循环的;
- (iv) $J_n(\lambda)$ 的唯一的特征值是 λ , 而对应的特征子空间的维数等于 1, 这是因为

$$J_n(\lambda) - \lambda E_n = J_n(0),$$

其秩等于 $n - 1$.

(v) $J_n(\lambda)$ 可对角化当且仅当 $n = 1$.

定理 11.3 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 则 $\mathcal{A}$ 在 V 的某组基下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & O & \cdots & O \\ O & J_{d_2}(\lambda_2) & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & J_{d_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

其中 $d_1, \dots, d_k \in \mathbb{Z}^+$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$, 都不必两两不同.

证明. 由循环子空间分解 (上一讲定理 9.3) 可知

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k,$$

其中 W_i 是 d_i -维 $\mathcal{A}$ -不可分子空间, $i = 1, 2, \dots, k$. 由上一讲引理 9.13 和代数学基本定理, $\mathcal{A}_{W_i}$ 的极小多项式是 $(t - \lambda_i)^{d_i}$. 根据引理 10.1, $\mathcal{A}_{W_i}$ 在 W_i 的某组基下的矩阵是 $J_{d_i}(\lambda_i)$. 再由第二章第三讲定理 5.9, $\mathcal{A}$ 在 V 的某组基下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & O & \cdots & O \\ O & J_{d_2}(\lambda_2) & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & J_{d_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}. \quad \square$$

例 11.4 设 $\mathcal{D} : \mathbb{C}[x]^{(n)} \longrightarrow \mathbb{C}[x]^{(n)}$ 是导数算子. 计算 $\mathcal{D}$ 的 *Jordan* 标准型.

解. 由上一讲例 9.15, $\mathbb{C}[x]^{(n)}$ 是 $\mathcal{D}$ -不可分的. 于是, $\mathcal{D}$ 的 *Jordan* 标准型是 $J_n(0)$. 注意到

$$\mathbb{C}[x]^{(n)} = \mathbb{C}[\mathcal{D}] \cdot x^{n-1}.$$

由引理 10.1 可知 $\mathcal{D}$ 在基底

$$\mathcal{D}^{n-j}(x^{n-1}) = \frac{(n-1)!}{j!} x^j, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

下的矩阵是 $J_n(0)$. $\square$

推论 11.5 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$. 则 A 相似于

$$J_A = \begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & O & \cdots & O \\ O & J_{d_2}(\lambda_2) & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & J_{d_k}(\lambda_k) \end{pmatrix},$$

其中 $d_1, \dots, d_k \in \mathbb{Z}^+$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$, 都不必两两不同.

例 11.6 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$.

- $n = 1$. $(a) = J_1(a)$.
- $n = 2$. 设 $\chi_A = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2)$. 如果 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 则根据第二章第四讲推论 8.8,

$$A \sim_s \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & 0 \\ 0 & J_1(\lambda_2) \end{pmatrix}.$$

设 $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda$. 如果 $\mu_A = t - \lambda$, 则根据可对角化判别法(V)可知,

$$A \sim_s \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1(\lambda) & 0 \\ 0 & J_1(\lambda) \end{pmatrix}.$$

如果 $\mu_A = (t - \lambda)^2$, 则 A 对应循环算子(第二章第四讲定理 9.11). 再根据不可分子空间判别法, F^2 是 A -不可分的. 于是

$$A \sim_s \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = J_2(\lambda).$$

- $n = 3$. 设 $\chi_A = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2)(t - \lambda_3)$. 如果 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 互不相同, 则根据第二章第四讲推论 8.8,

$$A \sim_s \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & J_1(\lambda_2) & 0 \\ 0 & 0 & J_1(\lambda_3) \end{pmatrix}.$$

设 $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$. 如果 $\mu_A = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2)$, 则根据可对角化判别法 V,

$$A \sim_s \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & J_1(\lambda_2) & 0 \\ 0 & 0 & J_1(\lambda_2) \end{pmatrix}.$$

如果 $\mu_A = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2)^2$, 则 A 对应循环算子(第二章第四讲定理 9.11). 再根据不可分子空间判别法, F^3 不是 A -不可分的. 故

$$A \sim_s \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & O_{1 \times 2} \\ O_{2 \times 1} & J_2(\lambda_2) \end{pmatrix}.$$

设 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 =: \lambda$. 如果 $\mu_A = t - \lambda$, 则根据可对角化判别法(V),

$$A \sim_s \lambda E_3 = \begin{pmatrix} J_1(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & J_1(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & J_1(\lambda) \end{pmatrix}.$$

如果 $\mu_A = (t - \lambda)^2$, 则 A 对应算子不是循环的(第二章第四讲定理 9.11). 再根据不可分子空间判别法, F^3 不是 A -不可分的. 故

$$A \sim_s \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1(\lambda) & O \\ O & J_2(\lambda) \end{pmatrix}.$$

如果 $\mu_A = (t - \lambda)^3$, 则 A 对应算子是循环的(第二章第四讲定理 9.11). 再根据不可分子空间判别法, F^3

是 A -不可分的,

$$A \sim_s \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = J_3(\lambda).$$

例 11.7 设

$$J_2(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} J_2(0) & O \\ O & O \end{pmatrix}_{4 \times 4}, \quad B = \begin{pmatrix} J_2(0) & O \\ O & J_2(0) \end{pmatrix}.$$

则 $\mu_A = \mu_B = t^2$ 且 $\chi_A = \chi_B = t^4$. 通过极小多项式和特征多项式, 我们仍无法在相似的意义下区分 A 和 B . 注意到 $\text{rank}(A) \neq \text{rank}(B)$. 于是, $A \not\sim_s B$.

J_A 中的矩阵称为 A 的一个 *Jordan* 标准型. J_A 的基本性质如下:

注解 11.8 (i) $\text{rank}(J_A) = \sum_{i=1}^k \text{rank}(J_{d_i}(\lambda_i))$;

(ii) J_A 的(也是 A 的)极小多项式等于

$$\text{lcm}((t - \lambda_1)^{d_1}, \dots, (t - \lambda_k)^{d_k});$$

特征多项式等于

$$(t - \lambda_1)^{d_1} \cdots (t - \lambda_k)^{d_k};$$

(iii) 设 $\lambda \in \text{spec}_{\mathbb{C}}(\mathcal{A})$. 则 J_A 中至少有一个关于 λ 的 *Jordan* 块.

(iv) λ 的代数重数等于 λ 在 J_A 主对角线上出现的次数;
 λ 的几何重数等于关于 λ 的 *Jordan* 块在 J_A 中出现的次数;

(v) λ 在极小多项式中的重数等于 J_A 中关于 λ 的 *Jordan* 块出现的最大阶数.

(vi) A 可对角化当且仅当 $d_1 = \cdots = d_k = 1$.

性质 (i) 来自 J_A 是分块对角矩阵.

性质 (ii) 成立是因为第二章第三讲定理 5.9 和第二章第三讲例 7.14.

性质 (iii) 成立是因为 $\lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$.

性质 (iv) 中的第一部分可由 (i) 中特征多项式的形式直接得出. 下面来验证性质 (iv) 的第二部分. 注意到

$$J_A - \lambda E_n = \begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) - \lambda E_{d_1} & O & \cdots & O \\ O & J_{d_2}(\lambda_2) - \lambda E_{d_2} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & J_{d_k}(\lambda_k) - \lambda E_{d_k} \end{pmatrix}.$$

因为

$$\text{rank}(J_{d_i}(\lambda_i) - \lambda E_{d_i}) = \begin{cases} d_i, & \lambda \neq \lambda_i, \\ d_i - 1, & \lambda = \lambda_i, \end{cases}$$

$i = 1, 2, \dots, k$. 于是,

$\text{rank}(J_A - \lambda E_n) = n - (J_A \text{ 中关于 } \lambda \text{ 的 Jordan 块出现的次数})$.

由此和矩阵的秩和解空间维数的关系得出 $\dim(V^\lambda)$ 等于 J_A 中关于 λ 的 Jordan 块出现的次数. 于是, (iv) 成立.

性质 (v) 来自于 (i) 中极小多项式的形式.

最后, 我们来验证性质 (vi). 如果 $d_1 = \dots = d_k = 1$, 则 J_A 可对角化. 于是, A 可对角化. 反之, A 可对角化蕴含 μ_A 中每个因子的重数都等于 1 (对角化判别法 V). 由性质 (v), J_A 是对角阵.

例 11.9 设 $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

计算 J_A .

解. 直接计算得 $\chi_A = (t - \alpha)^3$. 于是, α 是 A 唯一的特征根, 其代数重数等于 3.

$$\text{rank}(A - \alpha E) = \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由此看出, 当 $\alpha \neq 0$ 时, $\text{rank}(A - \alpha E) = 1$. 故 α 的几何重数等于 2. 由基本性质 (iv),

$$J_A = \begin{pmatrix} J_2(\alpha) & O \\ O & J_1(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

当 $\alpha = 0$ 时, $\text{rank}(A - \alpha E) = 0$. 故 α 的几何重数等于 3. 由基本性质 (iv),

$$J_A = \begin{pmatrix} J_1(0) & 0 & 0 \\ 0 & J_1(0) & 0 \\ 0 & 0 & J_1(0) \end{pmatrix} = O_{3 \times 3}. \quad \square$$

例 11.10 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

计算 J_A .

解. 直接计算得 $\chi_A = (t - 2)(t - 1)^2$. 于是, 2 的代数和几何重数都等于 1. 故 $J_1(2)$ 在 J_A 中出现一次. 注意到 1 的几何重数等于

$$3 - \text{rank}(A - E) = 3 - \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

故 $J_2(1)$ 在 J_A 中出现一次. 由此得出

$$J_A = \begin{pmatrix} J_1(2) & O \\ O & J_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \square$$

例 11.11 设 $S \in M_n(\mathbb{C})$ 满足 $S^2 - nS = O$. 求 J_S .

解. 设 $f(t) = t(t - n)$. 则 $f(A) = O$.

情形 1: $\mu_S = t$. $S = O = J_S$.

情形 2: $\mu_S = t - n$. $S = nE_n = J_S$.

情形 3: $\mu_S = t(t - n)$. 因为 $n \neq 0$, 所以 S 可对角化(判别法 V). 于是

$$J_S = \begin{pmatrix} nE_r & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

其中 $r = \text{rank}(S)$.

例 11.12 设 $A \in M_5(\mathbb{C})$, $\text{rank}(A) = 3$, $\text{rank}(A^2) = 2$, $\text{rank}(A + E) = 4$ 和 $\text{rank}((A + E)^2) = 3$. 求 J_A .

解. 因为 $\text{rank}(A) = 3 < 5$, 所以 0 是 A 的特征根且几何重数为 2. 故 J_A 中有两个以 0 为特征根的 $Jordan$ 块.

因为 $\text{rank}(A + E) = 4 < 5$, 所以 -1 是 A 的特征根且几何重数为 1. 故 J_A 中有一个以 -1 为特征根的 $Jordan$ 块.

下面我们来分析 J_A 中 $Jordan$ 块的阶数.

情形 1. 假设出现在 J_A 中的两个以 0 为特征根的 *Jordan* 块是 $J_1(0)$ 和 $J_1(0)$. 则 $J_A = \begin{pmatrix} O_{2 \times 2} & \\ & B \end{pmatrix} = P^{-1}AP$, 其中 $B \in \text{GL}_3(\mathbb{C})$ 和 $P \in \text{GL}_5(\mathbb{C})$. 则

$$\text{rank}(A^2) = \text{rank}(J_A^2) = \text{rank} \begin{pmatrix} O_{2 \times 2} & \\ & B^2 \end{pmatrix} = 3 \neq 2,$$

矛盾.

情形 2. 假设出现在 J_A 中的两个以 0 为特征根的 *Jordan* 块是 $J_1(0)$ 和 $J_2(0)$. 则 $J_A = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & J_2(0) & \\ & & C \end{pmatrix} = P^{-1}AP$, 其中 $C \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ 和 $P \in \text{GL}_5(\mathbb{C})$. 直接计算得 $\text{rank}(A^2) = 2$.

情形 2.1. 如果 $C = J_2(-1)$, 则 $J_{A+E} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & J_2(1) & \\ & & J_2(0) \end{pmatrix}$.

我们有 $\text{rank}(J_A + E) = 4$ 和 $\text{rank}((J_A + E)^2) = 3$. 因为

$$J_A + E = P^{-1}(A + E)P \implies \text{rank}((A + E)^2) = \text{rank}(J_A^2).$$

故 $J_A = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & J_2(0) & \\ & & J_2(-1) \end{pmatrix}$ 满足题目要求.

情形 2.2. 如果 $C = \text{diag}(-1, \alpha)$, $\alpha \neq 1$, 则

$$\text{rank}((A + E)^2) = 4.$$

不满足题目要求.

情形 3. 设 $J_A = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & J_3(0) & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ 或 $J_A = \begin{pmatrix} J_2(0) & & \\ & J_2(0) & \\ & & -1 \end{pmatrix}$.

则 $\text{rank}((A + E)^2) = 4$, 不满足题目要求.

综上所述, $J_A = \begin{pmatrix} J_1(0) & & \\ & J_2(0) & \\ & & J_2(-1) \end{pmatrix}$.

关于 $\mathbb{C}$ 上 Jordan 标准型尚不知道的秘密:

- (i) 唯一性是否成立?
- (ii) 关于特征值 λ 的 Jordan 块的阶是多少?