

第二章 线性算子

11 初等因子组

记号: 除非特别说明, 在本节中 V 是 F 上的 n 维线性空间, 其中 F 是任意域.

重集 是指元素可以重复出现的集合.

例 11.1 设 $S = \{a, a, b\}$ 和 $T = \{a, b\}$. 它们作为重集不相等. 元素 a 在 S 中的重数等于 2, 在 T 中等于 1.

例 11.2 我们由素分解 $24 = 2^3 3$. 利用重集表示 24 的素因子为 $\{2, 2, 2, 3\}$.

定义 11.3 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$,

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k \quad (1)$$

是 V 的 $\mathcal{A}$ -不可分子空间直和分解. 令 $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}|_{W_i}$ 和 $\mu_i = \mu_{\mathcal{A}_i}$. 重集 $\{\mu_1, \dots, \mu_k\}$ 称为 $\mathcal{A}$ 关于 (1) 的初等因子组.

由上一讲引理 10.5 可知, 初等因子组中的元素都是 $F[t]$ 中(首一)不可约多项式的幂次. 类似地, 我们可以定义矩阵的初等因子组.

例 11.4 设 $\mathcal{E}$ 是 V 上的恒同算子, $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基. 则

$$V = \langle \mathbf{e}_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle \mathbf{e}_n \rangle,$$

是 V 的一个 $\mathcal{E}$ -不可分子空间的直和分解. 算子 $\mathcal{E}$ 关于上述直和分解的初等因子组是

$$\underbrace{\{t-1, \dots, t-1\}}_n.$$

例 11.5 设 $\mathcal{D}$ 是 $\mathbb{R}[x]^{(n)}$ 上的导数算子. 则 $\mathbb{R}[x]^{(n)}$ 是 $\mathcal{D}$ -不可分的. 于是, $\mathcal{D}$ 的初等因子组是 $\{t^n\}$.

在本节中, 我们将说明以下结论:

- (i) 对于任何 V 的 $\mathcal{A}$ -不可分子空间直和分解, 初等因子组相同;
- (ii) 当 $F = \mathbb{C}$ 时, 初等因子组唯一确定 Jordan 标准型;
- (iii) 初等因子组可以通过计算若干矩阵的秩得到.

引理 11.6 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $f \in F[t]$. 设

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_\ell, \tag{2}$$

其中 $U_1, \dots, U_\ell$ 是 $\mathcal{A}$ -不变子空间. 则

$$f(\mathcal{A})(V) = f(\mathcal{A})(U_1) \oplus \cdots \oplus f(\mathcal{A})(U_\ell).$$

证明. 设 $W = f(\mathcal{A})(U_1) + \cdots + f(\mathcal{A})(U_\ell)$. 因为 $U_i \subset V$, 所以 $f(\mathcal{A})(U_i) \subset f(\mathcal{A})(V)$. 于是, $W \subset f(\mathcal{A})(V)$. 反之, 设 $\mathbf{x} \in f(\mathcal{A})(V)$. 则存在 $\mathbf{v} \in V$ 使得 $\mathbf{x} = f(\mathcal{A})(\mathbf{v})$. 由 (2) 可知

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_\ell,$$

其中 $\mathbf{v}_i \in U_i, i = 1, 2, \dots, \ell$. 由此得出

$$\mathbf{x} = f(\mathcal{A})(\mathbf{v}) = f(\mathcal{A})(\mathbf{v}_1) + \cdots + f(\mathcal{A})(\mathbf{v}_\ell).$$

因为 U_i 是 $\mathcal{A}$ -不变的, 所以 $f(\mathcal{A})(\mathbf{v}_i) \in U_i$. 故 $\mathbf{x} \in W$. 我们得到 $f(\mathcal{A})(V) = W$.

下面验证: $f(\mathcal{A})(U_1) + \cdots + f(\mathcal{A})(U_\ell)$ 是直和. 设

$$\mathbf{0} = \mathbf{w}_1 + \cdots + \mathbf{w}_\ell,$$

其中 $\mathbf{w}_i \in f(\mathcal{A})(U_i)$. 则 $\mathbf{w}_i \in U_i$. 由 (2) 可知, $\mathbf{w}_i = \mathbf{0}$, $i = 1, 2, \dots, \ell$ (第一章第二讲命题 4.16). 进而, 同样的命题蕴含 $f(\mathcal{A})(U_1) + \cdots + f(\mathcal{A})(U_\ell)$ 是直和. $\square$

引理 11.7 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, V 是 $\mathcal{A}$ -循环的. 设 $\mu_{\mathcal{A}} = p^m$, 其中 $p \in F[t] \setminus F$. 则

$$\text{rank}(p(\mathcal{A})^k) = \begin{cases} (m - k) \deg(p), & 0 \leq k \leq m \\ 0, & k > m. \end{cases}$$

证明. 当 $k \geq m$ 时, $p^k(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$. 故 $\text{rank}(p^k(\mathcal{A})) = 0$.

下面设 $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$, $\mathbf{v} \in V$ 是 $\mathcal{A}$ -循环向量, 且 $\mathbf{w}_k = p(\mathcal{A})^k(\mathbf{v})$.

断言 1. $\text{im}(p^k(\mathcal{A})) = F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}_k$.

断言 1 的证明. 设 $\mathbf{x} \in V$. 则存在 $f \in F[t]$ 使得 $\mathbf{x} = f(\mathcal{A})(\mathbf{v})$ (第二章第四讲命题 9.2 (i)). 于是,

$$p^k(\mathcal{A})(\mathbf{x}) = p^k(\mathcal{A})f(\mathcal{A})(\mathbf{v}) = f(\mathcal{A})p(\mathcal{A})^k(\mathbf{v}) = f(\mathcal{A})(\mathbf{w}_k) \in F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}_k.$$

由此得出, $\text{im}(p^k(\mathcal{A})) \subset F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}_k$. 反之, 由 $\mathbf{w}_k$ 的定义可知, $\mathbf{w}_k \in \text{im}(p^k(\mathcal{A}))$. 因为 $\text{im}(p^k(\mathcal{A}))$ 是 $\mathcal{A}$ -不变的(第二章第三讲命题 5.5), 所以 $F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}_k \subset \text{im}(p^k(\mathcal{A}))$. 断言 1 成立.

断言 2. 设 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 在 $F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}_k$ 上的限制算子, 则 $\mu_{\mathcal{B}} = p^{m-k}$.

断言 2 的证明. 设 $\mathbf{x} \in F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}_k$. 则存在 $g \in F[t]$ 使得

$$\mathbf{x} = g(\mathcal{B})p^k(\mathcal{B})(\mathbf{v}) \implies p^{m-k}(\mathcal{B})(\mathbf{x}) = g(\mathcal{B})p^m(\mathcal{B})(\mathbf{v}) = \mathbf{0}.$$

故 $p^{m-k}(\mathcal{B}) = \mathcal{O}$. 故 $\mu_{\mathcal{B}} | p^{m-k}$. 反之, $\mu_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \mathcal{O}$ 蕴含

$$\mu_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})(\mathbf{w}_k) = \mathbf{0} \implies \mu_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})p^k(\mathcal{A})(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \implies (\mu_{\mathcal{B}}p^k)(\mathcal{A}) = \mathcal{O}.$$

故 $\mu_{\mathcal{A}} | (\mu_{\mathcal{B}}p^k)$. 从而 $p^{m-k} | \mu_{\mathcal{B}}$. 综上所述, 断言 2 成立.

断言 1 和 2, 以及第二章第五讲定理 9.8 蕴含

$$\dim(\text{im}(p^k(\mathcal{A}))) = (m - k) \deg(p).$$

根据第二章第一讲推论 1.14, $\text{rank}(p^k(\mathcal{A})) = (m - k) \deg(p)$.

□

定理 11.8 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\mu_{\mathcal{A}} = p^m$, 其中 $p \in F[t] \setminus F$ 不可约. 对任意 $\ell \in \mathbb{Z}^+$, 设 n_{ℓ} 是 p^{ℓ} 在 V 的某个 $\mathcal{A}$ -不可分子空间分解的初等因子组中 p^{ℓ} 的重数. 令 $d = \deg(p)$ 和 $r_i = \text{rank}(p^i(\mathcal{A}))$, $i \in \mathbb{N}$. 则

$$n_{\ell} = \frac{1}{d}(r_{\ell-1} + r_{\ell+1} - 2r_{\ell}). \quad (3)$$

证明. 设

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k \quad (4)$$

是 V 的一个 $\mathcal{A}$ -不可分子空间分解. 设 $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}|_{V_i}$ 和 $\mu_i = \mu_{\mathcal{A}_i}$, $i = 1, 2, \dots, k$. 则存在 $m_1, \dots, m_k \in \{1, 2, \dots, m\}$ 使得 $\mu_1 = p^{m_1}$, $\mu_2 = p^{m_2}$, $\dots$, $\mu_k = p^{m_k}$. (见第二章第三讲定理 5.9). 由第二章第五讲定理 9.8 和第二章第五讲引理 9.15, $\dim(V_i) = m_i d$, $i = 1, 2, \dots, k$. 特别地, $\dim(V_i) \leq md$. 令 $\mathbb{S} = \{V_1, \dots, V_k\}$. 则 n_{ℓ} 是 $\mathbb{S}$ 中维数为 ℓd 的子空间的个数.

对 $j \in \{1, \dots, m\}$, 令 $\mathbb{S}_j = \{U \in \mathbb{S} \mid \dim(U) = jd\}$. 则 (4) 可重写为

$$V = \bigoplus_{j=1}^m \left(\bigoplus_{U \in \mathbb{S}_j} U \right). \quad (5)$$

根据引理 11.6, 我们有

$$p(\mathcal{A})^{\ell}(V) = \bigoplus_{j=1}^m \left(\bigoplus_{U \in \mathbb{S}_j} p(\mathcal{A})^{\ell}(U) \right).$$

注意到当 $U \in \mathbb{S}_j$ 时, U 不但是 $\mathcal{A}$ -循环的且 $\mathcal{A}|_U$ 的极小多项式是 p^j . 根据引理 11.7, 当 $j > \ell$ 时,

$$\text{rank}(p^\ell(\mathcal{A}|_U)) = (j - \ell)d \quad (6)$$

且当 $j \leq \ell$ 时, $p(\mathcal{A})^\ell(U) = \{\mathbf{0}\}$. 特别地, 上式可缩写为

$$p(\mathcal{A})^\ell(V) = \bigoplus_{j=\ell+1}^m \left(\bigoplus_{U \in \mathbb{S}_j} p(\mathcal{A})^\ell(U) \right). \quad (7)$$

我们运用维数和秩的关系推导:

$$\begin{aligned} r_\ell &= \dim(p(\mathcal{A})^\ell(V)) \quad (r_\ell \text{ 的定义}) \\ &= \dim \left(\bigoplus_{j=\ell+1}^m \left(\bigoplus_{U \in \mathbb{S}_j} p(\mathcal{A})^\ell(U) \right) \right) \quad (\text{根据 (7)}) \\ &= \sum_{j=\ell+1}^m \left(\sum_{U \in \mathbb{S}_j} \dim(p(\mathcal{A})^\ell(U)) \right) \quad (\text{第一章第二讲命题 4.15}) \\ &= \sum_{j=\ell+1}^m \left(\sum_{U \in \mathbb{S}_j} \text{rank}(p(\mathcal{A}_U)^\ell) \right) \quad (\text{限制算子和第二章第一讲推论 1.14}) \\ &= \sum_{j=\ell+1}^m \left(\sum_{U \in \mathbb{S}_j} (j - \ell)d \right) \quad ((6)) \\ &= \sum_{j=\ell+1}^m n_j(j - \ell)d \quad (n_j \text{ 的定义}) \end{aligned}$$

对任意 $\ell \in \mathbb{Z}^+$ 成立. 令 $r_0 = \dim(V)$. 则由上式和 (9), 我

们有

$$r_\ell = d \sum_{j=\ell+1}^m n_j(j-\ell) \quad (8)$$

对任意 $\ell \in \mathbb{N}$ 成立.

我们要利用 (8) 把 $n_1, n_2, \dots$, 用 $r_0, r_1, r_2, r_3, \dots$, 表示出来. 根据 (8) 可知, 对任意 $\ell \in \mathbb{Z}^+$

$$r_{\ell-1} = d \left(n_\ell + 2n_{\ell+1} + \sum_{j=\ell+2}^m n_j(j-\ell+1) \right),$$

$$r_\ell = d \left(n_{\ell+1} + \sum_{j=\ell+2}^m n_j(j-\ell) \right),$$

和

$$r_{\ell+1} = d \left(\sum_{j=\ell+2}^m n_j(j-\ell-1) \right).$$

于是,

$$r_{\ell-1} - r_\ell = d \left(n_\ell + n_{\ell+1} + \sum_{j=\ell+2}^m n_j \right), \quad r_\ell - r_{\ell+1} = d \left(n_{\ell+1} + \sum_{j=\ell+2}^m n_j \right)$$

即

$$(r_{\ell-1} - r_\ell) - (r_\ell - r_{\ell+1}) = dn_\ell \implies n_\ell = \frac{1}{d}(r_{\ell-1} + r_{\ell+1} - 2r_\ell). \quad \square$$

例 11.9 设

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -6 & 5 \\ 5 & -1 & 8 & -7 \\ -2 & 1 & -5 & 4 \\ -5 & 2 & -11 & 9 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C}).$$

已知 $\chi_A = t^4$. 计算 J_A .

解. $r_0 = \text{rank}(A^0) = 4$, $r_1 = \text{rank}(A) = 2$. 于是, 0 的几何重数等于 2. 由此得出 J_A 中有两个关于 0 的 *Jordan* 块.

$$r_2 = \text{rank}(A^2) = \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = 1.$$

于是

$$n_1 = 4 + 1 - 2 \times 2 = 1.$$

由此直接推出 $n_2 = 0$, $n_3 = 1$, $n_4 = 0$. 故

$$J_A = \begin{pmatrix} J_3(0) & \\ & J_1(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

定理 11.10 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\mu_{\mathcal{A}}$ 在 $F[t]$ 中的两两互素首一的不可约因子是 $p_1, \dots, p_s$, 它们的次数分别是 $d_1, \dots, d_s$. 设 $\ell \in \mathbb{Z}^+$, $i \in \{1, 2, \dots, s\}$, $N(i, \ell)$ 是 p_i^ℓ 在 V 的某个 $\mathcal{A}$ -不可分子空间分解的初等因子组中的重数. 则

$$N(i, \ell) = \frac{1}{d_i} (R(i, \ell - 1) + R(i, \ell + 1) - 2R(i, \ell)),$$

其中 $R(i, j) = \text{rank}(p_i(\mathcal{A})^j)$, $j \in \mathbb{N}$. 特别地, 任何 $\mathcal{A}$ -不可分子空间分解初等因子组都相等(称为 $\mathcal{A}$ 的初等因子组).

证明. 设

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k \quad (9)$$

是 V 的一个 $\mathcal{A}$ -不可分子空间分解. 注意到对 $j = 1, 2, \dots, k$, $\mu_j = \mu_{A_{V_j}}$ 是某个 $p_1, \dots, p_s$ 的幂次. 我们不妨对 $i = 1$ 来证明定理的结论.

设 $\mathbb{S} = \{V_1, \dots, V_k\}$ 且 $\mathbb{S}_1 = \{U \in \mathbb{S} \mid p_1 \mid \mu_{A_U}\}$. 令

$$W = \bigoplus_{U \in \mathbb{S}_1} U \quad \text{和} \quad \widetilde{W} = \bigoplus_{U \in (\mathbb{S} \setminus \mathbb{S}_1)} U.$$

则

$$V = W \oplus \widetilde{W}. \quad (10)$$

断言 1. 对任意 $\ell \in \mathbb{N}$, 令 $r_\ell = \text{rank}(p_1(\mathcal{A}_W)^\ell)$. 则

$$N(1, \ell) = \frac{1}{d_1} (r_{\ell-1} + r_{\ell+1} - 2r_\ell).$$

断言 1 的证明. 注意到 $\mathcal{A}_W$ 是 W 上的线性算子,

$$W = \bigoplus_{U \in \mathbb{S}_1} U$$

是 W 的 A_W -不可分子空间分解, 且 $\mathcal{A}_W$ 的极小多项式是 p_1 的某个幂次, 根据定理 11.8, p_1^ℓ 在 $\mathcal{A}_W$ 关于上述 W 的直和分解的初等因子组中出现的重数

$$n_\ell = \frac{1}{d_1}(r_{\ell-1} + r_{\ell+1} - 2r_\ell).$$

再注意到对任意 $U \in (\mathbb{S} \setminus \mathbb{S}_1)$, $\mathcal{A}_U$ 的极小多项式都不是 p_1 的任何幂次. 于是 $N(1, \ell) = n_\ell$. 断言 1 成立.

断言 2. $p_1(\mathcal{A})|_{\widetilde{W}}$ 上可逆.

断言 2 的证明. 设 $\mu_{A_W} = p_1^m$ 且 $q = \mu_{A_{\widetilde{W}}}$. 因为 q 是 $p_2, \dots, p_s$ 的幂次之积 (第二章第二讲定理 6.9), 所以 p_1^m 与 q 互素. 于是 $\mu_{\mathcal{A}} = \text{lcm}(p_1^m, q) = p_1^m q$ (第二章第二讲引理 6.7 和定理 5.3). 根据 Bezout 关系, 存在 $a, b \in F[t]$ 使得 $a(t)p^m(t) + b(t)q(t) = 1$. 故 $a(\mathcal{A})p^m(\mathcal{A}) + b(\mathcal{A})q(\mathcal{A}) = \mathcal{E}$. 因为 $q(\mathcal{A})$ 限制在 $\widetilde{W}$ 上是零算子, 所以对任意 $\mathbf{x} \in \widetilde{W}$, $a(\mathcal{A})p^m(\mathcal{A})(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. 故 $p^m(\mathcal{A})$ 在 $\widetilde{W}$ 可逆. 进而, $p(\mathcal{A})$ 在 $\widetilde{W}$ 上也可逆. 断言 2 成立.

断言 3. 对任意 $\ell \in \mathbb{N}$, $R(1, \ell) = r_\ell + \dim(\widetilde{W})$.

断言 3 的证明. 由引理 11.6,

$$p_1(\mathcal{A})^\ell(V) = p_1(\mathcal{A})^\ell(W) \oplus p_1(\mathcal{A})^\ell(\widetilde{W}).$$

于是,

$$\dim(p_1(\mathcal{A})^\ell(V)) = \dim(p_1(\mathcal{A})^\ell(W)) + \dim(p_1(\mathcal{A})^\ell(\widetilde{W})).$$

根据断言 2, $\dim(p_1(\mathcal{A})^\ell(V)) = \dim(p_1(\mathcal{A}_W)^\ell(W)) + \dim(\widetilde{W})$.

故 $R(1, \ell) = r_\ell + \dim(\widetilde{W})$. 断言 3 成立.

对任意 $\ell \in \mathbb{Z}^+$, 我们计算

$$\begin{aligned} N(1, \ell) &= \frac{1}{d_1}(r_{\ell-1} + r_{\ell+1} - 2r_\ell) \quad (\text{断言 1}) \\ &= \frac{1}{d_1}(r_{\ell-1} + \dim(\widetilde{W}) + r_{\ell+1} \dim(\widetilde{W}) - 2(r_\ell + \dim(\widetilde{W}))) \\ &= \frac{1}{d_1}(R(1, \ell-1) + R(1, \ell+1) - 2R(1, \ell)) \quad (\text{断言 3}). \end{aligned}$$

由上述公式看出, 初等因子组只与 $p_i(\mathcal{A})^\ell$ 有关. 故初等因子组独立于 $\mathcal{A}$ -不可分子空间分解的选择. $\square$

定义 11.11 设 $A \in M_n(F)$. 把 A 看成从 F^n 上的线性算子所对应的初等因子组称为矩阵 A 的初等因子组.

定理 11.12 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$. 在不计 *Jordan* 块出现顺序的前提下, A 的 *Jordan* 标准型由 A 的初等因子组唯一确定.

证明. 设 $\mathcal{A}: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ 由公式 $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ 确定. 设

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$$

是 V 的一个 $\mathcal{A}$ -不可分子空间分解. 令 $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{V_i}$ 和 $\mu_i = \mu_{\mathcal{A}_i}$, $i = 1, 2, \dots, k$. 根据代数学基本定理, 存在 $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in$

$\mathbb{C}$ (不必两两不同), $d_1, \dots, d_k \in \mathbb{Z}^+$ 使得

$$\mu_1 = (t - \alpha_1)^{d_1}, \dots, \mu_k = (t - \alpha_k)^{d_k}.$$

于是, $\mathcal{A}$ 的初等因子组是

$$\{(t - \alpha_1)^{d_1}, \dots, (t - \alpha_k)^{d_k}\}.$$

根据第二章第五讲引理 11.1, $\mathcal{A}$ 在 V 的某组基下的矩阵是

$$J_A = \begin{pmatrix} J_{d_1}(\alpha_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{d_k}(\alpha_k) \end{pmatrix}.$$

于是, $A \sim_s J_A$ 且 J_A 由 $\mathcal{A}$ 的初等因子组唯一确定. $\square$

由上述定理可知, 记号 J_A 以及把 J_A 称为 A 的 Jordan 标准型都是合理的. 进而, 计算复数域上方阵的 Jordan 标准型等价于计算该矩阵的初等因子组.

注解 11.13 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 且 $\text{spec}_{\mathbb{C}}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$. 则 $\chi_{\mathcal{A}}$ 的不可约因子是 $t - \lambda_1, \dots, t - \lambda_s$. 我们可以把上一讲定理 11.10 中的 $R(i, \ell)$ 和 $N(i, \ell)$ 分别记为 $R(\lambda_i, \ell)$ 和 $N(\lambda_i, \ell)$. 此时的重数公式是

$$N(\lambda_i, \ell) = R(\lambda_i, \ell - 1) + R(\lambda_i, \ell + 1) - 2R(\lambda_i, \ell),$$

其中 $\lambda_i \in \text{spec}_{\mathbb{C}}(A)$, $\ell \in \mathbb{Z}^+$.

例 11.14 设:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_7(\mathbb{C}).$$

计算 J_A .

解. 由计算机计算得:

$$\chi_A = t^7 - 9t^6 + 34t^5 - 70t^4 + 85t^3 - 61t^2 + 24t - 4 = (t-2)^2(t-1)^5.$$

设 $\lambda_1 = 2$ 和 $\lambda_2 = 1$. 显然 $R(\lambda_1, 0) = 7$. 由计算机得 $R(\lambda_1, 1) = 6, R(\lambda_1, 2) = 5$. 于是,

$$N(\lambda_1, 1) = R(\lambda_1, 0) + R(\lambda_1, 2) - 2R(\lambda_1, 1) = 7 + 5 - 2 \times 6 = 0.$$

由计算机得 $R(\lambda_1, 3) = 5$., 于是,

$$N(\lambda_1, 2) = R(\lambda_1, 1) + R(\lambda_1, 3) - 2R(\lambda_1, 2) = 6 + 5 - 2 \times 5 = 1.$$

因为 λ_1 的代数重数等于 2, 所以当 $\ell > 2$ 时, $N(\lambda_1, \ell) = 0$. 显然 $R(\lambda_2, 0) = 7$. 由计算机得 $R(\lambda_2, 1) = 4, R(\lambda_2, 2) = 2$. 于

是,

$$N(\lambda_2, 1) = R(\lambda_2, 0) + R(\lambda_2, 2) - 2R(\lambda_2, 1) = 7 + 2 - 2 \times 4 = 1.$$

由计算机计算得 $R(\lambda_2, 3) = 2$. 于是,

$$N(\lambda_2, 2) = R(\lambda_2, 1) + R(\lambda_2, 3) - 2R(\lambda_2, 2) = 4 + 2 - 2 \times 2 = 2.$$

因为 λ_2 的代数重数等于 5, 所以当 $\ell > 2$ 时, $N(\lambda_2, \ell) = 0$.

由此得出

$$J_A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \square$$

例 11.15 设 $A \in M_5(\mathbb{C})$. 设

$$\text{rank}(A) = 3, \text{rank}(A^2) = 2, \text{rank}(A+E) = 4, \text{rank}((A+E)^2) = 3.$$

求 J_A

解. 由秩的条件可知 $\lambda_1 = 0$ 和 $\lambda_2 = -1$ 是 A 的两个特征根. 根据上一讲定理 11.10,

$$N(\lambda_1, 1) = R(\lambda_1, 0) + R(\lambda_1, 2) - 2R(\lambda_1, 1) = 5 + 2 - 2 \times 3 = 1$$

和

$$N(\lambda_2, 1) = R(\lambda_2, 0) + R(\lambda_2, 2) - 2R(\lambda_2, 1) = 5 + 3 - 2 \times 4 = 0.$$

注意到 $\text{rank}(A) = 3$ 和 $\text{rank}(A + E) = 4$ 分别蕴含 λ_1 的几何重数是 2 和 λ_2 的几何重数是 1. 由此得出 $N(\lambda_1, 2) = 1$ 和 $N(\lambda_2, 2) = 1$. 我们有

$$J_A = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & 0 & 0 & & \\ & & & -1 & 1 \\ & & & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad \square$$

12 矩阵相似的判定

引理 12.1 设 $A, B \in M_n(F)$ 且 $A \sim_s B$. 则对任意 $f \in F[t]$, $f(A) \sim_s f(B)$. 特别地, $\text{rank}(f(A)) = \text{rank}(f(B))$.

证明. 设 $A = P^{-1}BP$, 其中 $P \in \text{GL}_n(F)$. 因为对任意 $k \in \mathbb{N}$, $A^k = P^{-1}B^kP$, 所以 $f(A) = P^{-1}f(B)P$. $\square$

定理 12.2 (相似判别法 I) 设 $A, B \in M_n(F)$. 则 $A \sim_s B$ 当且仅当 A 和 B 由共同的初等因子组.

证明. 设 $A \sim_s B$. 则 $\mu_A = \mu_B$ (第二章第二讲命题 4.9). 设 $p_1, \dots, p_s$ 是 μ_A 的两两互素的首一的不可约因子. 则它们

也是 μ_B 的两两互素的首一的不可约因子. 根据引理 12.1, 对任意 $\ell \in \mathbb{N}, i \in \{1, 2, \dots, s\}, \text{rank}(p_i(\mathcal{A})^\ell) = \text{rank}(p_i(\mathcal{B})^\ell)$. 由上一讲定理 11.10, A 和 B 由共同的初等因子组.

反之, 设 A 和 B 由共同的初等因子组 $\{p_1, \dots, p_k\}$. 把 A 和 B 看成 F^n 的算子分别记为 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$. 令

$$F^n = V_1 \oplus \dots \oplus V_k = W_1 \oplus \dots \oplus W_k,$$

其中 V_i 是 $\mathcal{A}$ -不可分的, W_i 是 $\mathcal{B}$ -不可分的, $i=1, 2, \dots, k$. 调整下标后可再设 $\mathcal{A}_{V_i}$ 和 $\mathcal{B}_{W_i}$ 的极小多项式都是 p_i . 令

$$p_i = t^{d_i} + \alpha_{i,d_i-1}t^{d_i-1} + \dots + \alpha_{i,1}t + \alpha_{i,0},$$

其中 $\alpha_{i,n-1}, \dots, \alpha_{i,1}, \alpha_{i,0} \in F$. 因为 V_i 是 $\mathcal{A}$ -不可分的, 所以它是 $\mathcal{A}$ -循环的. 于是存在 $\mathbf{v}_i \in V$ 使得 $V_i = F[\mathcal{A}_{V_i}] \cdot \mathbf{v}_i$. 由此得出 $\mathcal{A}_{V_i}$ 在基底 $\mathbf{v}_i, \mathcal{A}(\mathbf{v}_i), \dots, \mathcal{A}^{d_i-1}(\mathbf{v}_i)$ 下的矩阵是

$$M_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_{i,0} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_{i,1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\alpha_{i,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{i,d_i-1} \end{pmatrix} \in M_{d_i}(F).$$

同理存在 $\mathbf{w}_i \in V$ 使得 $W_i = F[\mathcal{B}_{W_i}] \mathbf{w}_i$, 且 $\mathcal{B}_{W_i}$ 在基底 $\mathbf{w}_i, \mathcal{B}(\mathbf{w}_i), \dots, \mathcal{B}^{d_i-1}(\mathbf{w}_i)$ 下的矩阵也是 M_i . 由第二章第三

讲定理 5.9,

$$A \sim_s \begin{pmatrix} M_1 & O & \cdots & O \\ O & M_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & M_k \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad B \sim_s \begin{pmatrix} M_1 & O & \cdots & O \\ O & M_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & M_k \end{pmatrix}.$$

于是, $A \sim_s B$. $\square$

定理 12.3 (相似判别法II) 设 $A, B \in M_n(F)$. 则 $A \sim_s B$ 当且仅当下述两点同时成立:

- (i) $\chi_A = \chi_B$, 或 $\mu_A = \mu_B$;
- (ii) 设 $p_1, \dots, p_s$ 是 χ_A 或 μ_A 在 $F[t]$ 中的两两互素的(首一的)不可约因子, 且

$$\forall i \in \{0, 1, \dots, n+1\}, j \in \{1, 2, \dots, s\}, \text{rank}(p_j(A)^i) = \text{rank}(p_j(B)^i).$$

证明. 设 $A \sim_s B$. 则 $\chi_A = \chi_B$ 和 $\mu_A = \mu_B$ (第二章第三讲定义 7.6 后的讨论和第二章第二讲命题 4.9). 由引理 12.1, 对任意 $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, $j \in \{1, 2, \dots, s\}$,

$$p_j(A)^i \sim_s p_j(B)^i \implies \text{rank}(p_j(A)^i) = \text{rank}(p_j(B)^i).$$

反之, 设 $\chi_A = \chi_B$ 和 (ii), 或 $\mu_A = \mu_B$ 和 (ii) 成立. 则 A 和 B 由共同的初等因子组(上一讲定理 11.10). 于是, $A \sim_s B$ (定理 12.2). $\square$

定理 12.4 (相似判别法 III) 设 $A, B \in M_n(F)$. 则 $A \sim_s B$ 当且仅当对任意 $f \in F[t]$, $\text{rank}(f(A)) = \text{rank}(f(B))$.

证明. 设 $A \sim_s B$. 引理 12.1 蕴含, 对任意 $f \in F[t]$, $\text{rank}(f(A)) = \text{rank}(f(B))$. 反之, 因为 $\text{rank}(\mu_A(A))=0$, 所以 $\text{rank}(\mu_A(B))=0$. 于是 $\mu_A(B)=0$. 由此可知 $\mu_B|\mu_A$ (第二章第二讲引理 4.2). 同理 $\mu_A|\mu_B$. 于是, $\mu_A = \mu_B$. 由定理 12.3 可知, $A \sim_s B$. $\square$.

例 12.5 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$. 证明: $A \sim_s A^t$.

证明. 注意到对任意 $f \in F[t]$, $f(A)^t = f(A^t)$. 故

$$\text{rank}(f(A)) = \text{rank}(f(A)^t) = \text{rank}(f(A^t)).$$

由定理 12.4 可知, $A \sim_s A^t$. $\square$

例 12.6 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. 证明: 如果存在 $P \in GL_n(\mathbb{C})$ 使得 $A = P^{-1}BP$, 则存在 $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ 使得 $A = Q^{-1}BQ$.

证明. 因为存在 $P \in GL_n(\mathbb{C})$ 使得 $A = P^{-1}BP$, 所以对任意 $f \in \mathbb{C}[t]$, $\text{rank}(f(A)) = \text{rank}(f(B))$ (定理 12.4). 特别地, 任意 $g \in \mathbb{R}[t]$, $\text{rank}(g(A)) = \text{rank}(g(B))$. 再由定理 12.4, 存在 $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ 使得 $A = Q^{-1}BQ$. $\square$

例 12.7 设 $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$. 证明:

$$J_A = \begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & O & \cdots & O \\ O & J_{d_2}(\lambda_2) & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & J_{d_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}$$

蕴含

$$J_{A^{-1}} = \begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1^{-1}) & O & \cdots & O \\ O & J_{d_2}(\lambda_2^{-1}) & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & J_{d_k}(\lambda_k^{-1}) \end{pmatrix}.$$

证明. 首先, $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ 蕴含 A 的特征根非零. 于是, λ_i^{-1} 有意义. 设 $\lambda \in \text{spec}_{\mathbb{C}}(A)$. 则

$$|\lambda E - A| = 0 \iff |A| |\lambda A^{-1} - E| = 0 \iff |\lambda^{-1} E - A^{-1}| = 0.$$

即 $\lambda \in \text{spec}_{\mathbb{C}}(A) \iff \lambda^{-1} \in \text{spec}_{\mathbb{C}}(A^{-1})$. 于是, $p_\lambda = t - \lambda$ 是 χ_A 的因子当且仅当 $q_\lambda = t - \lambda^{-1}$ 是 $\chi_{A^{-1}}$ 的因子. 设 $\ell \in \{0, 1, \dots, n\}$. 则

$$\text{rank}((A - \lambda E)^\ell) = \text{rank}(A^\ell (E - \lambda A^{-1})^\ell) = \text{rank}((\lambda^{-1} E - A^{-1})^\ell).$$

于是, 对任意 $\ell \in \{0, 1, \dots, n\}$, $\text{rank}(p_\lambda(A)^\ell) = \text{rank}(q_\lambda(A)^\ell)$. 根据上一讲定理 11.10, 对任意 $\lambda \in \text{spec}_{\mathbb{C}}(A)$, p_λ 在 A 的初等因子组中的重数等于 q_λ 在 A^{-1} 的初等因子组中的重

数. 故对任意 $m \in \mathbb{Z}^+$, $J_m(\lambda)$ 出现在 J_A 中的重数等于 $J_m(\lambda^{-1})$ 出现在 $J_{A^{-1}}$ 中的重数. $\square$

注解 12.8 上述例子说明: 如果 $\text{spec}_{\mathbb{C}}(A) = \{1, -1\}$, 则 $A \sim_s A^{-1}$.