

第三章 内积空间

命题 1.20 设 V 的一组单位正交基是 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ 在这组基下的坐标分别是 $(x_1, \dots, x_n)^t$ 和 $(y_1, \dots, y_n)^t$. 则

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n.$$

证明. 因为 $G(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = E_n$, 所以第三章第一讲命题 1.7 蕴含结论. $\square$

命题 1.21 设 V 的一组单位正交基是 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, $\mathbf{x} \in V$. 则 $\mathbf{x}$ 在该基下的第 i 个坐标分量是 $(\mathbf{x}|\mathbf{e}_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

证明. 设 $\mathbf{x}$ 在 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 下的坐标是 $(x_1, \dots, x_n)^t$. 则

$$(\mathbf{x}|\mathbf{e}_i) = \left(\sum_{j=1}^n x_j \mathbf{e}_j | \mathbf{e}_i \right) = \sum_{j=1}^n x_j (\mathbf{e}_j | \mathbf{e}_i) = \sum_{j=1}^n x_j \delta_{j,i} = x_i. \quad \square$$

例 1.22 设 V 和 W 是两个 n -维欧氏空间, 其中的内积分别记为 $(|)_V$ 和 $(|)_W$. 则存在线性同构 $\phi: V \longrightarrow W$ 满足对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$,

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y})_V = (\phi(\mathbf{y})|\phi(\mathbf{y}))_W.$$

证明. 设 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组单位正交基, 而 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ 是 W 的一组单位正交基. 则存在线性映射 ϕ 使得

$$\phi(\mathbf{e}_i) = \epsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

(第一章第二讲定理 4.11). 进而, ϕ 是线性同构(第一章第二讲定理 4.12 的证明). 设 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$ 和 $\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + \cdots + y_n\mathbf{e}_n$. 根据命题 1.20,

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y})_V = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n.$$

因为 $\phi(\mathbf{x}) = x_1\epsilon_1 + \cdots + x_n\epsilon_n$ 和 $\phi(\mathbf{y}) = y_1\epsilon_1 + \cdots + y_n\epsilon_n$, 所以命题 1.20 蕴含

$$(\phi(\mathbf{x})|\phi(\mathbf{y}))_W = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n.$$

我们有 $(\mathbf{x}|\mathbf{y})_V = (\phi(\mathbf{x})|\phi(\mathbf{y}))_W$. $\square$

2 正交投影和正交补

定义 2.1 设 $\mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{x} \in V$. 称

$$\left(\mathbf{x} \mid \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right) \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

为 $\mathbf{x}$ 在 $\mathbf{v}$ 上的投影.

命题 2.2 设 $\mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{y}$ 是 $\mathbf{x}$ 在 $\mathbf{v}$ 上的投影. 则 $(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \perp \mathbf{y}$.

证明: 设 $\mathbf{w} = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$. 则 $(\mathbf{w}|\mathbf{w}) = 1$ 且 $\mathbf{y} = (\mathbf{x}|\mathbf{w})\mathbf{w}$. 直接计算得:

$$(\mathbf{x} - \mathbf{y}|\mathbf{y}) = (\mathbf{x}|\mathbf{y}) - (\mathbf{y}|\mathbf{y}) = (\mathbf{x}|\mathbf{w})(\mathbf{x}|\mathbf{w}) - (\mathbf{x}|\mathbf{w})^2(\mathbf{w}|\mathbf{w}) = 0. \quad \square$$

记号. 设 $X, Y \subset V$. 如果对任意的 $\mathbf{x} \in X$ 和 $\mathbf{y} \in Y$ 都有 $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$. 则称 X 与 Y 正交. 记为 $X \perp Y$. 当 $X = \{\mathbf{x}\}$ 时, $X \perp Y$ 也记为 $\mathbf{x} \perp Y$.

命题 2.3 设 $U \subset V$ 是子空间, $\mathbf{x} \in V$. 则存在唯一的 $\mathbf{u} \in U$ 使得 $(\mathbf{x} - \mathbf{u}) \perp U$.

证明. 如果 $U = \{\mathbf{0}\}$, 则令 $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ 即可. 否则, 设 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d$ 是 U 的一组单位正交基. 令 $\mathbf{u} = (\mathbf{x} | \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + \dots + (\mathbf{x} | \mathbf{e}_d)\mathbf{e}_d$. 则 $\mathbf{u} \in U$. 则 $(\mathbf{x} - \mathbf{u} | \mathbf{e}_i) = (\mathbf{x} | \mathbf{e}_i) - (\mathbf{x} | \mathbf{e}_i) = 0, i = 1, 2, \dots, d$. 因为 $\mathbf{x} - \mathbf{u}$ 与 U 的一组基底中的每个元素都正交, 所以 $(\mathbf{x} - \mathbf{u}) \perp U$.

再设 $\mathbf{v} \in U$ 使得 $(\mathbf{x} - \mathbf{v}) \perp U$. 则 $(\mathbf{v} | \mathbf{e}_i) = (\mathbf{x} | \mathbf{e}_i), i = 1, 2, \dots, d$. 于是, $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ (命题 1.21). $\square$

注解 2.4 称上述命题中的 $\mathbf{u}$ 是 $\mathbf{x}$ 在子空间 U 上的正交投影. 向量 $\mathbf{x}$ 在 $\mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ 上的投影就是 $\mathbf{x}$ 在 $\langle \mathbf{v} \rangle$ 上的正交投影.

定理 2.5 设 $U \subset V$ 是子空间. 令 $U^\perp := \{\mathbf{x} \in V \mid \mathbf{x} \perp U\}$. 则

- (i) $U^\perp$ 是子空间且 $U \perp U^\perp$;
- (ii) $V = U \oplus U^\perp$ (称 $U^\perp$ 是 U 的正交补).
- (iii) $(U^\perp)^\perp = U$.

证明. (i) 设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U^\perp$ 和 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. 则对任意 $\mathbf{u} \in U$,

$$(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}|\mathbf{u}) = \alpha(\mathbf{x}|\mathbf{u}) + \beta(\mathbf{y}|\mathbf{u}) = 0.$$

于是, $(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) \perp \mathbf{u}$. 我们得到 $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in U^\perp$. 由 $U^\perp$ 的定义可知, $U \perp U^\perp$.

(ii) 设 $\mathbf{x} \in U \cap U^\perp$. 则 $\mathbf{x} \perp \mathbf{x} = 0$. 于是, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (第三章引理 1.15 (i)). 我们只要证明 $V = U + U^\perp$ 即可. 设 $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{u}$ 是 $\mathbf{x}$ 在 U 上的正交投影. 则 $\mathbf{x} - \mathbf{u} \in U^\perp$ (命题 2.2). 故 $\mathbf{x} \in U + U^\perp$. 从而, $V = U \oplus U^\perp$.

(iii) 由正交补得定义可知 $U \subset (U^\perp)^\perp$. 根据 (ii),

$$V = U \oplus U^\perp = U^\perp \oplus (U^\perp)^\perp.$$

于是, $\dim(U) = \dim((U^\perp)^\perp)$ (直和的维数公式). 根据第一章第二讲命题 4.12 (i), 我们得到 $U = (U^\perp)^\perp$. $\square$

推论 2.6 设 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d$ 是 V 中的单位正交向量. 则 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d$ 可扩充为 V 的一组单位正交基.

证明. 设 $U = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d \rangle$. 则 $U^\perp$ 有一组单位正交基 $\mathbf{e}_{d+1}, \dots, \mathbf{e}_n$. 根据定理 2.5, $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d, \mathbf{e}_{d+1}, \dots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组单位正交基. $\square$

例 2.7 设标准欧式空间 $\mathbb{R}^3$ 的标准基是 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. 则

$$\langle \mathbf{e}_1 \rangle^\perp = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle, \quad \langle \mathbf{e}_1 \rangle^{\perp\perp} = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle^\perp = \langle \mathbf{e}_1 \rangle. \quad \square$$

例 2.8 设 $\mathbb{R}^4$ 是标准欧式空间,

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

计算子空间 $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle^\perp$ 的一组基.

解. 注意到 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle^\perp$ 当且仅当 $(\mathbf{x}|\mathbf{u}_1) = (\mathbf{x}|\mathbf{u}_2) = (\mathbf{x}|\mathbf{u}_3) = 0$. 即

$$(\mathbf{u}_1^t, \mathbf{u}_2^t, \mathbf{u}_3^t)\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

换言之, $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle^\perp$ 是上述方程组的解空间. 直接计算该解空间的基是 $(0, 1, 0, -1)^t$. $\square$

例 2.9 设标准欧式空间 $\mathbb{R}^3$ 中子空间 U 是方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$$

的解空间. 求 $U^\perp$ 的一组基.

解. 上述方程组的系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

由方程组可知 $\vec{A}_1^t, \vec{A}_2^t \in U^\perp$. 因为 $\text{rank}(A) + \dim(U) = 3$, 所以 $U^\perp = \langle \vec{A}_1^t, \vec{A}_2^t \rangle$. (定理 2.5). 因为 $\text{rank}(A) = 2$, 所以 $U^\perp$ 的一组基是 $\vec{A}_1^t, \vec{A}_2^t$. $\square$

例 2.10 设 $\mathbf{v} \in V$ 是单位向量. 定义

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mathbf{v}}: V &\longrightarrow V \\ \mathbf{x} &\longmapsto (\mathbf{x}|\mathbf{v})\mathbf{v}. \end{aligned}$$

证明: $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$ 是线性算子 (称为关于单位向量 $\mathbf{v}$ 的正交投影算子), 并确定 $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$ 的所有特征根和特征子空间.

证明. 设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. 则

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mathbf{v}}(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) &= (\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}|\mathbf{v})\mathbf{v} = \alpha(\mathbf{x}|\mathbf{v})\mathbf{v} + \beta(\mathbf{y}|\mathbf{v})\mathbf{v} \\ &= \alpha\mathcal{P}(\mathbf{x}) + \beta\mathcal{P}(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

故 $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$ 是线性算子.

设 $\mathbf{e}_1 = \mathbf{v}$. 它是单位向量. 由推论 2.6, V 由一组单位正交基, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$, 直接计算得 $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1$ 和 $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}(\mathbf{e}_j) = \mathbf{0}, j = 2, \dots, n$. 故 $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$ 在 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ 下得矩阵是 $A = \text{diag}(1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1})$. 故 $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$ 有两个特征根 $\lambda_1 = 1$ 和 $\lambda_2 = 0$. 它们对应得特征子空间分别是

$$V^{\lambda_1} = \langle \mathbf{v} \rangle \quad \text{和} \quad V^{\lambda_2} = \langle \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n \rangle. \quad \square$$

例 2.11 设 $U \subset V$ 是子空间, $\dim(U) = d$ 且 $0 < d < n$.

定义

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_U: V &\longrightarrow V \\ \mathbf{x} &\mapsto \mathbf{v} \text{ 在 } U \text{ 上的正交投影.}\end{aligned}$$

证明: $\mathcal{P}_U$ 是线性算子 (称为关于子空间 U 的正交投影算子), 并确定 $\mathcal{P}_U$ 的所有特征根和特征子空间.

证明. 根据定理 2.5, $V = U \oplus U^\perp$. 设 $\mathbf{y}$ 是 $\mathbf{x}$ 关于上述直和在 U 上的投影. 则 $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in U^\perp$. 故 $\mathbf{y}$ 是 $\mathbf{x}$ 在 U 上的正交投影. 于是, $\mathcal{P}_U$ 是从 V 到 U 关于上述直和的投射. 从而它是线性算子.

设 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d$ 是 U 的一组单位正交基, 则 $U^\perp$ 有单位正交基 $\mathbf{e}_{d+1}, \dots, \mathbf{e}_n$, 且

$$\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d, \mathbf{e}_{d+1}, \dots, \mathbf{e}_n,$$

是 V 的一组单位正交基. 在该基下 $\mathcal{P}_U$ 的矩阵是

$$\text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_d, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-d}).$$

故 $\mathcal{P}_U$ 有两个特征根 $\lambda_1 = 1$ 和 $\lambda_2 = 0$. 它们对应得特征子空间分别是 $V^{\lambda_1} = U$ 和 $V^{\lambda_2} = U^\perp$. $\square$

3 正交矩阵与正交等价

设欧式空间 V 由两组单位正交基 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$, 矩阵 $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ 满足 $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)P$. 则对任

意 $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, 我们有

$$\delta_{i,j} = (\epsilon_i | \epsilon_j) = ((\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \vec{P}^{(i)} | (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \vec{P}^{(j)}) = (\vec{P}^{(i)})^t \vec{P}^{(j)}.$$

由此得出 $P^t P = E$, 进而 $PP^t = E$.

定义 3.1 设 $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. 如果 $P^t = P^{-1}$, 则称 P 是正交矩阵. 所有 n 阶正交矩阵的集合记为 $O_n(\mathbb{R})$.

显然, E 是正交矩阵.

命题 3.2 集合 $O_n(\mathbb{R})$ 是 $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ 的子群.

证明. 根据第一学期第四章第一讲命题 2.24, 只要证明对任意 $P, Q \in O_n(\mathbb{R})$, $PQ^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$. 我们计算

$$(PQ^{-1})^t(PQ^{-1}) = (Q^{-1})^t P^t P Q^{-1} = (Q^t)^t Q^{-1} = QQ^{-1} = E.$$

于是, $(PQ^{-1})^t = (PQ^{-1})^{-1}$. $\square$

命题 3.3 (i) 如果 $P \in O_n(\mathbb{R})$, 则 $\det(P) = \pm 1$.

(ii) $P \in O_n(\mathbb{R})$ 当且仅当 P 的列向量是标准欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 中的一组单位正交基.

(iii) $P \in O_n(\mathbb{R})$ 当且仅当 P 的行向量是标准欧式空间 $\mathbb{R}^{1 \times n}$ 中的一组单位正交基.

证明. (i) 因为 $P^t P = 1$, 所以 $\det(P^t P) = 1$. 于是,

$$\det(P^t) \det(P) = \det(P)^2 = 1.$$

故 $\det(P) = \pm 1$.

(ii) 对任意 $i, j \in \{1, \dots, n\}$,

$$(\vec{P}^i | \vec{P}^j) = \delta_{i,j} \iff (\vec{P}^i)^t \vec{P}^j = \delta_{i,j} \iff P^t P = 1.$$

(iii) 考虑矩阵 P^t 即可. $\square$

例 3.4 证明: $P \in O_2(\mathbb{R})$ 当且仅当存在 θ 使得

$$P = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad P = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

证明. 设

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

是正交矩阵. 由命题 3.3 (ii) 可知, $a^2 + c^2 = 1$ 可知. 我们不妨设 $a = \cos(\theta)$. 则 $c = \pm \sin(\theta)$. 由命题 3.3 (iii) 可知, $a^2 + b^2 = 1$. 于是, $b = \pm \sin(\theta)$. 同理 $c^2 + d^2 = 1$ 得出 $d = \pm \cos(\theta)$.

情形 1. $c = \sin(\theta)$, $b = -\sin(\theta)$. 由 $ab + cd = 0$ 得出 $d = \cos(\theta)$. 此时

$$P = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

情形 2. $c = \sin(\theta)$, $b = \sin(\theta)$. 由 $ab + cd = 0$ 得出 $d = -\cos(\theta)$. 此时

$$P = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

其它情形可在上述情形中把 θ 换为 $-\theta$ 得到. $\square$

命题 3.5 设欧式空间 V 由基 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$, 矩阵 $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ 满足 $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)P$. 再设 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 是单位正交基. 则 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ 是单位正交基当且仅当 $P \in \text{O}_n(\mathbb{R})$.

证明. 设 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ 是单位正交基. 由引进正交矩阵的概念的推导过程可知, $P \in \text{O}_n(\mathbb{R})$. 反之, 设 $P \in \text{O}_n(\mathbb{R})$. 对任意 $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$$(\epsilon_i | \epsilon_j) = ((\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \vec{P}^{(i)} | (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \vec{P}^{(j)}) = (\vec{P}^{(i)})^t \vec{P}^{(j)} = \delta_{i,j}.$$

故 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ 是单位正交基. $\square$

设 V 有两组单位正交基 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$. 则存在唯一的 $P \in \text{O}_n(\mathbb{R})$ 使得 $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)P$. 设 $A \in \mathcal{L}(V)$ 在 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ 下的矩阵分别是 A 和 B . 根据第二章第一讲第 2.2 节第一段,

$$B = P^{-1}AP = P^tAP \quad (\because P \in \text{O}_n(\mathbb{R})).$$

定义 3.6 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. 如果存在 $P \in O_n(\mathbb{R})$ 使得 $B = P^{-1}AP$, 则称 A 与 B 正交等价(正交相似), 记为 $A \sim_o B$.

我们来验证 $\sim_o$ 是等价关系. 因为 $E \in O_n(\mathbb{R})$, 所以对任意 $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A = E^{-1}AE$. 故 $A \sim_o A$. 自反性成立.

设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ 满足 $A \sim_o B$. 则存在 $P \in O_n(\mathbb{R})$ 使得 $B = P^{-1}AP$. 于是, $A = PBP^{-1}$. 根据命题 3.2, $P^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$, 我们得到 $B \sim_o A$. 对称性成立.

再设 $C \in M_n(\mathbb{R})$ 且 $A \sim_o B$ 和 $B \sim_o C$. 则存在 $P, Q \in O_n(\mathbb{R})$ 使得 $B = P^{-1}AP$ 和 $C = Q^{-1}BQ$. 于是, $C = Q^{-1}P^{-1}APQ = (PQ)^{-1}A(PQ)$. 根据命题 3.2, $PQ \in O_n(\mathbb{R})$. 故 $A \sim_o C$. 传递律成立. 验证完毕.

注解 3.7 符号如定义 3.6, 如果 $A \sim_o B$, 则 $A \sim_s B$ 且 $A \sim_c B$. 这是因为正交矩阵的逆和转置相等. 由此可得, 矩阵的相似不变量和合同不变量都是正交等价的不变量.

例 3.8 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

证明: $A \sim_s B$, $A \sim_c B$ 但 $A \not\sim_o B$.

证明. 显然 $\chi_A = \chi_B = t^2$. 因为 $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$ 且 $\text{rank}(A^2) = \text{rank}(B^2)$. 根据相似判定法则 I, $A \sim_s B$. 设

$P = \text{diag}(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. 则 $P^t A P = B$. 于是, $A \sim_c B$.

假设存在 $Q \in O_2(\mathbb{R})$ 使得 $Q^t A Q = B$. 根据例 3.4, 我们有

$$Q = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad Q = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

如果 Q 为前者, 则 $AQ = QB$ 蕴含

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是, $\sin(\theta) = 0$ 且 $\cos(\theta) = 0$. 矛盾. 类似地可证明 Q 也不可能等于后者. $\square$

问题. 给定 $A \in M_n(\mathbb{R})$,

1. 求它在正交等价下的标准型.
2. 给定 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, 判定它们是否正交等价.

4 正规算子和正规矩阵

记号: 在本节中 V 是 n 维欧式空间, 其中 $n > 0$.

4.1 伴随算子

定义 4.1 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 如果算子 $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(V)$ 满足对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $(\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathbf{y}) = (\mathbf{x}|\mathcal{B}(\mathbf{y}))$, 则称 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的伴随算子.

命题 4.2 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 则 $\mathcal{A}$ 的伴随算子存在且唯一. 如果 $\mathcal{A}$ 在 V 的单位正交基 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵等于 A , 则其伴随算子在该基下的矩阵等于 A^t .

证明. 设 $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(V)$ 使得它在 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵等于 A^t . 则对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}|\mathcal{B}(\mathbf{y})) &= (x_1, \dots, x_n)A^t(y_1, \dots, y_n)^t \\&= (y_1, \dots, y_n)A(x_1, \dots, x_n)^t \\&= (\mathbf{y}|\mathcal{A}(\mathbf{x})) = (\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathbf{y}).\end{aligned}$$

于是, $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的伴随算子.

设 $\mathcal{C} \in \mathcal{L}(V)$ 是 $\mathcal{A}$ 的另一个伴随算子. 设 $A = (a_{i,j})$ 和 $\mathcal{C}$ 在 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵等于 $C = (c_{i,j})$. 则

$$a_{i,j} = (\mathcal{A}(\mathbf{e}_j)|\mathbf{e}_i) = (\mathbf{e}_j|\mathcal{C}(\mathbf{e}_i)) = c_{j,i},$$

其中, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. 故 $C = A^t$. 从而, $\mathcal{C} = \mathcal{B}$. $\square$

根据上述命题, 我们把 $\mathcal{A}$ 的伴随算子记为 $\mathcal{A}^*$.

4.2 正规算子

定义 4.3 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 如果 $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$, 则称 $\mathcal{A}$ 是正规算子. 类似地, 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$. 如果 $AA^t = A^tA$, 则称 A 是正规矩阵.

命题 4.4 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\mathcal{A}$ 在 V 的单位正交基 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵为 A . 则 $\mathcal{A}$ 正规当且仅当 A 正规.

证明. 由命题 4.2, $\mathcal{A}^*$ 在 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵为 A^t . 由第二章第一讲定理 2.1, $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ 和 $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ 在 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵分别是 AA^t 和 A^tA . 有矩阵表示的唯一性可知 (见第二章第一讲第 1.1 节), $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$ 当且仅当 $AA^t = A^tA$. $\square$

定义 4.5 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 如果 $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$, 则称 $\mathcal{A}$ 是对称算子. 如果 $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$, 则称 $\mathcal{A}$ 是斜对称算子.

对称和斜对称算子都是正规算子. 显然, 对称和斜对称矩阵都是正规矩阵.

命题 4.6 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\mathcal{A}$ 在 V 的单位正交基 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵为 A . 则 $\mathcal{A}$ (斜)对称的当且仅当 A (斜)对称的.

证明. 由命题 4.2, $\mathcal{A}^*$ 在 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵为 A^t . 于是, $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$ 当且仅当 $A^t = A$; $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$ 当且仅当 $A^t = -A$; $\square$

例 4.7 证明正交矩阵是正规矩阵.

证明. 设 $P \in O_n(\mathbb{R})$. 则 $P^tP = E = PP^t$. $\square$

定义 4.8 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 如果对于任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$,

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = (\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathcal{A}(\mathbf{y})),$$

则称 $\mathcal{A}$ 是保内(积)的.

命题 4.9 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\mathcal{A}$ 在 V 的单位正交基 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵为 A . 则下列断言等价

(i) $\mathcal{A}$ 保内;

(ii) $A \in O_n(\mathbb{R})$;

(iii) 对任意 $\mathbf{x} \in V$, $\|\mathbf{x}\| = \|\mathcal{A}(\mathbf{x})\|$ (保长);

(iv) 对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|\mathcal{A}(\mathbf{x}) - \mathcal{A}(\mathbf{y})\|$ (保距).

证明. (i) $\implies$ (ii). 对任意 $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$$\delta_{i,j} = (\mathbf{e}_i|\mathbf{e}_j) = ((\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)\vec{A}^{(i)}|(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)\vec{A}^{(j)}) = (\vec{A}^{(i)})^t \vec{A}^{(j)}.$$

于是, $A^t A = E$. 即 $A \in O_n(\mathbb{R})$.

(ii) $\implies$ (iii). 设 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$. 我们计算

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{A}(\mathbf{x})\|^2 &= (\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathcal{A}(\mathbf{x})) \\
&= ((\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} | (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}) \\
&= (x_1, \dots, x_n)A^t A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
&= x_1^2 + \cdots + x_n^2.
\end{aligned}$$

于是, $\|\mathbf{x}\| = \|\mathcal{A}(\mathbf{x})\|$.

(iii) $\implies$ (iv) 对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, 我们有

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|\mathcal{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| = \|\mathcal{A}(\mathbf{x}) - \mathcal{A}(\mathbf{y})\|.$$

(iv) $\implies$ (i) 对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, 我们有

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|\mathcal{A}(\mathbf{x}) - \mathcal{A}(\mathbf{y})\| \Rightarrow (\mathbf{x} - \mathbf{y} | \mathbf{x} - \mathbf{y}) = (\mathcal{A}(\mathbf{x}) - \mathcal{A}(\mathbf{y}) | \mathcal{A}(\mathbf{x}) - \mathcal{A}(\mathbf{y})).$$

于是,

$$\|\mathbf{x}\|^2 - 2(\mathbf{x} | \mathbf{y}) + \|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathcal{A}(\mathbf{x})\|^2 - 2(\mathcal{A}(\mathbf{x}) | \mathcal{A}(\mathbf{y})) + \|\mathcal{A}(\mathbf{y})\|^2.$$

注意到 $\|\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{0}\|^2 = \|\mathcal{A}(\mathbf{x}) - \mathcal{A}(\mathbf{0})\| = \|\mathcal{A}(\mathbf{x})\|$. 同理 $\|\mathbf{y}\| = \|\mathcal{A}(\mathbf{y})\|$. 由上式可得 $(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = (\mathcal{A}(\mathbf{x}) | \mathcal{A}(\mathbf{y}))$. $\square$

注解 4.10 因为正交矩阵是正规矩阵(见例 4.7), 所以保内算子是正规算子. 它也称为正交(保长、保距)算子.

下述引理将用于计算正规矩阵在正交等价意义下的标准型.

引理 4.11 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 则 V 有一维或二维的 $\mathcal{A}$ 子空间.

证明. 因为 $\mathbb{R}[t]$ 中的非平凡不可约多项式的次数都不大于 2 (第一学期第五章第三讲推论 4.10), 所以 $\mu_{\mathcal{A}} = pq$, 其中 $p, q \in \mathbb{R}[t]$, $0 < \deg(p) \leq 2$, p 在 $\mathbb{R}[t]$ 中不可约. 因为 $\deg(q) < \deg(\mu_{\mathcal{A}})$, 所以 $q(\mathcal{A}) \neq \mathcal{O}$. 于是, 存在 $\mathbf{v} \in V$ 使得 $\mathbf{w} := q(\mathcal{A})(\mathbf{v}) \neq \mathbf{0}$. 设 $W = F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}$. 则 $\dim(W) > 0$. 因为

$$p(\mathcal{A})(\mathbf{w}) = p(\mathcal{A})q(\mathcal{A})(\mathbf{v}) = \mu_{\mathcal{A}}(\mathbf{v}) = \mathbf{0},$$

所以 $\deg(\mu_{\mathcal{A}, \mathbf{w}}) \leq 2$. 从而 $\dim(W) \leq 2$ (第二章第四讲命题 9.2 (iii)). $\square$

注解 4.12 上述引理只需 V 是 $\mathbb{R}$ 上有限维线性空间即可(见柯斯特利金书 64 页定理 7).