

中国科学院大学

试题专用纸

课程编号: B01GB003Y-B02

课程名称: 线性代数II-B (期末A卷)

任课教师: 李子明、李秀云、王艺森

注意事项:

1. 考试时间为180分钟, 考试方式闭卷;
2. 全部答案写在答题纸上;
3. 考试结束后, 请将本试卷和答题纸、草稿纸一并交回。

1. (10分) 设 $V = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(f) < 3\}$ 和

$$\begin{aligned} \mathcal{D}: V &\longrightarrow V \\ f(x) &\mapsto f'(x). \end{aligned}$$

设 $\mathcal{A} = (x-1)\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{B} = \mathcal{D}^2 - 2\mathcal{D} + \mathcal{E}$, 其中 $\mathcal{E}$ 是恒同算子. 判断 V 上的线性算子 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 是否可以对角化, 并给出理由.

解. 因为

$$(\mathcal{A}(1), \mathcal{A}(x), \mathcal{A}(x^2)) = (0, x-1, 2x(x-1)) = (1, x, x^2) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

所以 $\mathcal{A}$ 有三个互不相同的特征根 $0, 1, 2$. 故 $\mathcal{A}$ 可对角化.

因为

$$(\mathcal{B}(1), \mathcal{B}(x), \mathcal{B}(x^2)) = (1, -2+x, 2-4x+x^2) = (1, x, x^2) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_B,$$

所以 $\mathcal{B}$ 只有一个特征根 $\lambda = 1$. 而 $\dim(V^\lambda) = 3 - \text{rank}(E - B) = 1$. 故 $\mathcal{B}$ 不可对角化.

2. (10分) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. 计算 A 的特征多项式、极小多项式和 A^{2025} .

解. 直接计算得 $\chi_A(t) = t^2 + 2$.

因为 A 不是对角矩阵, 所以 $\mu_A(t)$ 的次数不等于 1. 根据 Cayley-Hamilton 定理, $\mu_A(t) = \chi_A(t)$.

因为 $A^2 = -2E$, 所以 $A^{2025} = AA^{2024} = A(-2E)^{1012} = 2^{1012}A$.

3. (10分) 设复方阵 A 的特征多项式是 $(t+1)^4t^2$, 极小多项式是 $(t+1)^2t^2$ 且

$$\text{rank}(A + E) = 4.$$

求 A 的 Jordan 标准型, 并说明理由.

解. 因为特征多项式的次数等于 6, 所以 A 是 6 阶矩阵. 因为 A 的特征根是 -1 和 0 , 所以矩阵只含有关于 -1 和 0 的 Jordan 块.

因为 0 的代数重数是 2, 所以在 J_A 的对角线上 0 出现两次. 又因为 t 在极小多项式中的重数是 2, 所以 J_A 中至少有一个 $J_2(0)$. 综上所述 J_A 中只有一个 $J_2(0)$ 且没有其它关于 0 的 Jordan 块.

因为 $\text{rank}(A + E) = 4$, 所以 -1 的几何重数等于 2. 故 J_A 中有两个关于 -1 的 Jordan 块. 综上所述

$$J_A = \begin{pmatrix} J_2(0) & O & O \\ O & J_2(-1) & O \\ O & O & J_2(-1) \end{pmatrix}.$$

4. (10分) 设 V 是欧氏空间, 其内积是 $(\cdot|\cdot)$, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$. 令关于 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ 的 Gram 矩阵 $G = ((\mathbf{v}_i|\mathbf{v}_j)) \in M_k(\mathbb{R})$. 证明: $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ 线性相关当且仅当 $\text{rank}(G) < k$.

证. 设 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ 线性相关. 则存在 $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, 不全为零, 使得

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j \mathbf{v}_j = \mathbf{0}.$$

则对任意 $i \in \{1, \dots, k\}$, $\sum_{j=1}^k \alpha_j (\mathbf{v}_i|\mathbf{v}_j) = (\mathbf{v}_i|\sum_{j=1}^k \alpha_j \mathbf{v}_j) = (\mathbf{v}_i|\mathbf{0}) = 0$. 故 $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)^t$ 是以 G 为系数矩阵的齐次线性方程组的非平凡解. 于是, $\text{rank}(G) < k$.

设 $\text{rank}(G) < k$. 则以 G 为系数矩阵的齐次线性方程组的非平凡解. 设它的一个非平凡解是 $(\beta_1, \dots, \beta_k)^t$. 令 $\mathbf{x} = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \beta_k \mathbf{v}_k$. 则

$$(\mathbf{x}|\mathbf{x}) = (\beta_1, \dots, \beta_k)G(\beta_1, \dots, \beta_k)^t = 0.$$

故 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. 由此得出 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ 线性相关.

5. (10分) 设实对称矩阵

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

已知 A 的特征多项式等于 $(t-1)(t+2)^2$. 计算正交矩阵 P 和对角矩阵 D 使得 $P^t A P = D$.

解. 设 $\lambda_1 = -2$ 和 $\lambda_2 = 1$. 直接计算得

$$(2E + A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

故 V^{λ_1} 有基底 $(1, -1, 0)^t$ 和 $(1, 0, -1)^t$. 进行 *Gram-Schmidt* 正交化得

$$\mathbf{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)^t,$$

$$\mathbf{e}'_2 = (1, 0, -1)^t - \frac{1}{2}(1, -1, 0)^t = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1 \right)^t,$$

和

$$\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)^t.$$

因为 A 可对角化, 所以 $V^{\lambda_1} \oplus V^{\lambda_2} = \mathbb{R}^3$. 因为 $V^{\lambda_1} \perp V^{\lambda_2}$, 所以 V^{λ_2} 是 V^{λ_1} 的正交补且维数等于 1. 故 $V^{\lambda_2} = \langle (1, 1, 1)^t \rangle$. 单位化得

$$\mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^t.$$

令

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

我们有 $D = P^t A P = \text{diag}(-2, -2, 1)$.

6. (10分) 设 V 是域 F 上的 n 维线性空间, $\mathcal{A}$ 是 V 上的线性算子, $\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{v}_2$ 是 $\mathcal{A}$ 的两个特征向量且 $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$. 证明: $\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{v}_2$ 的对应的特征值相等当且仅当 $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ 是 $\mathcal{A}$ 的特征向量.

证. 设 $\mathcal{A}(\mathbf{v}_1) = \lambda_1 \mathbf{v}_1$ 和 $\mathcal{A}(\mathbf{v}_2) = \lambda_2 \mathbf{v}_2$, 其中 $\lambda_1, \lambda_2 \in F$.

如果 $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda$. 则

$$\mathcal{A}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathcal{A}(\mathbf{v}_1) + \mathcal{A}(\mathbf{v}_2) = \lambda \mathbf{v}_1 + \lambda \mathbf{v}_2 = \lambda(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2).$$

因为 $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$ 时, 所以它是 $\mathcal{A}$ 的特征向量.

反之, 因为 $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ 是 $\mathcal{A}$ 的特征向量, 所以存在 $\lambda \in F$ 使得

$$\mathcal{A}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \lambda(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2).$$

又因为 $\mathcal{A}(\mathbf{v}_1) = \lambda_1 \mathbf{v}_1$ 和 $\mathcal{A}(\mathbf{v}_2) = \lambda_2 \mathbf{v}_2$, 所以 $\lambda(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2$. 于是,

$$(\lambda - \lambda_1)\mathbf{v}_1 + (\lambda - \lambda_2)\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}.$$

假设 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 则特征子空间 $V^{\lambda_1} \cap V^{\lambda_2} = \{\mathbf{0}\}$. 故 $\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{v}_2$ 线性无关. 上式蕴含 $\lambda = \lambda_1$ 且 $\lambda = \lambda_2$. 矛盾.

7. (10分) 设 $J_n(0)$ 是关于 0 的 n 阶 Jordan 块.

(i) 计算: $J_4(0)^2$ 和 $J_4(0)^3$ 的 Jordan 标准型.

(ii) 设 $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ 且 $l = \lfloor n/k \rfloor$, 即 l 是不大于 n/k 的最大整数. 证明: $J_n(0)^k$ 的 Jordan 标准型由 $(kl + k - n)$ 个 $J_l(0)$ 和 $(n - kl)$ 个 $J_{l+1}(0)$ 组成.

证. (i) 设 $M = J_4(0)^2$. 则

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

故其特征多项式等于 t^4 且极小多项式是 t^2 . 而 M 的唯一特征根 0 的几何重数是 $4 - \text{rank}(M) = 2$. 由此可知, $J_M = \begin{pmatrix} J_2(0) & O \\ O & J_2(0) \end{pmatrix}$.

设 $N = J_4(0)^3$. 则

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

故其特征多项式等于 t^4 且极小多项式是 t^2 . 而 M 的唯一特征根 0 的几何重数是 $4 - \text{rank}(N) = 3$. 由此可知, $J_N = \begin{pmatrix} J_2(0) & O \\ O & O_{2 \times 2} \end{pmatrix}$.

(ii) 设 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的标准基.

断言: 对 $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, $J_n(0)^i = (\underbrace{\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}}_i, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-i})$.

断言的证明. 显然 $J_n(0)^0 = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$. 设 i 满足 $1 < i \leq n$ 且断言对 $i-1$ 成立. 则 $J_n(0)^i = (\underbrace{\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}}_{i-1}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-i+1})J_n(0)$. 注意到任意 n 阶方阵 A ,

$$AJ_n(0) = (\mathbf{0}, \vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(n-1)}).$$

故 $J_n(0)^i = (\underbrace{\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}}_i, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-i})$. 断言成立.

由此可知 $\text{rank}(J_n(0)^i) = n - i$.

设 $A = J_n(0)^k$. 由断言可知, 当 $j < l$ 时, $\text{rank}(A^j) = n - kj$ 且当 $j \geq l$ 时, $\text{rank}(A^j) = 0$. 我们有:

$$\text{rank}(A^{l-1}) = n - k(l-1), \text{rank}(A^l) = n - kl, \text{rank}(A^{l+1}) = \text{rank}(A^{l+2}) = 0.$$

在 J_A 中 $J_l(0)$ 的个数是 $n - k(l-1) - 2(n - kl) = kl + k - n$. 而在 J_A 中 $J_{l+1}(0)$ 的个数是 $n - kl$. 因为 $(kl + k - n)l + (n - kl)(l+1) = n$, 所以 J_A 中不会有其它 Jordan 块.

8. (10分) 设 V 是 n 维欧氏空间, U 是 V 的子空间, $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d$ 是 U 的一组单位正交基, 其中 $0 < d < n$. 设

$$\begin{aligned} \mathcal{A}: V &\longrightarrow V \\ \mathbf{x} &\longmapsto \sum_{i=1}^d (\mathbf{x} | \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i. \end{aligned}$$

(i) 证明: $\mathcal{A}$ 是 V 上的线性算子且 $\mathbf{x} - \mathcal{A}(\mathbf{x})$ 与 U 正交.

(ii) 确定所有 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 使得 $\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{E}$ 是正交算子, 其中 $\mathcal{E}$ 是恒同算子.

证. (i) 设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $a, b \in \mathbb{R}$. 则

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^d (a\mathbf{x} + b\mathbf{y} | \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^d (a(\mathbf{x} | \mathbf{e}_i) + b(\mathbf{y} | \mathbf{e}_i)) \mathbf{e}_i \\ &= a \sum_{i=1}^d (\mathbf{x} | \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i + b \sum_{i=1}^d (\mathbf{y} | \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i = a\mathcal{A}(\mathbf{x}) + b\mathcal{A}(\mathbf{y}).\end{aligned}$$

故 $\mathcal{A}$ 是线性算子.

设 $\mathbf{e}_{d+1}, \dots, \mathbf{e}_n$ 是 $U^\perp$ 的一组单位正交基. 则 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d, \mathbf{e}_{d+1}, \dots, \mathbf{e}_n$ 是 U 的一组单位正交基. 对任意 $\mathbf{x} \in V$, 设 $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i$. 则 $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^d x_i \mathbf{e}_i$. 从而我们有: $\mathbf{x} - \mathcal{A}(\mathbf{x}) = \sum_{j=d+1}^n x_j \mathbf{e}_j \in U^\perp$. 故 $\mathbf{x} - \mathcal{A}(\mathbf{x})$ 与 U 正交.

(ii) 设 $\mathcal{B} = \alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{E}$. 对 $1 \leq i \leq d$, $\mathcal{B}(\mathbf{e}_i) = \alpha\mathcal{A}(\mathbf{e}_i) + \beta\mathbf{e}_i = (\alpha + \beta)\mathbf{e}_i$. 对 $d+1 \leq j \leq n$,

$$\mathcal{B}(\mathbf{e}_j) = \alpha\mathbf{0} + \beta\mathbf{e}_j = \beta\mathbf{e}_j.$$

于是, $\mathcal{B}$ 在单位正交基 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d, \mathbf{e}_{d+1}, \dots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵是

$$M = \text{diag}(\underbrace{\alpha + \beta, \dots, \alpha + \beta}_d, \underbrace{\beta, \dots, \beta}_{n-d}).$$

因为 $0 < d < n$, 所以 M 是正交矩阵当且仅当 $\alpha + \beta = \pm 1$ 且 $\beta = \pm 1$. 故我们有四组确定的值:

$$(\alpha, \beta) = (0, 1), (\alpha, \beta) = (0, -1), (\alpha, \beta) = (-2, 1), (\alpha, \beta) = (2, -1).$$

9. (10分) 设 n 阶实方阵 S 是斜对称且可逆. 证明:

(i) n 是偶数且 S^2 是负定的;

(ii) 对任意正定的实矩阵 A , $\det(A - S^2) > \det(A) + \det(S^2)$ 成立.

证. (i) 注意到 S 的正交标准型是 $\text{diag}(N_2(0, \beta_1), \dots, N_2(0, \beta_s), \underbrace{0, \dots, 0}_{n-2s})$. 因

为 S 可逆, 所以 $n = 2s$.

进而 S^2 正交等价于 $\text{diag}(-\beta_1^2, -\beta_1^2, \dots, -\beta_s^2, -\beta_s^2)$, 其中 $\beta_1, \dots, \beta_s$ 是非零实数. 故 S^2 负定.

(ii) 设 $B = -S^2$. 则 B 正定. 于是, 存在 $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ 使得

$$P^t A P = E \quad \text{和} \quad P^t B P = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

其中 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 都是正实数. 进而, $P^t A P + P^t B P = \text{diag}(1 + \alpha_1, \dots, 1 + \alpha_n)$. 于是 $\det(P)^2 \det(A + B) = \prod_{i=1}^n (1 + \alpha_i)$.

另一方面, $\det(A) + \det(B) = \det(P)^2 (1 + \prod_{i=1}^n \alpha_i)$. 因为 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^+$ 且 $n > 1$, 所以 $\prod_{i=1}^n (1 + \alpha_i) > 1 + \prod_{i=1}^n \alpha_i$. 由此得出,

$$\det(A + B) > \det(A) + \det(B).$$

因为 n 是偶数, 所以 $\det(B) = \det(S^2)$. 所证不等式成立.

10. (10分) 设 V 是域 F 上的 n 维线性空间, 其中 $n > 1$, $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是 V 上的线性算子且 $\mathcal{A} \circ \mathcal{B} = \mathcal{B} \circ \mathcal{A}$.

(i) 证明: 如果 V 是 $\mathcal{A}$ -循环的, 则 $\mathcal{B} \in F[\mathcal{A}]$.

(ii) 如果 V 不是 $\mathcal{A}$ -循环的, $\mathcal{B}$ 是否仍在 $F[\mathcal{A}]$ 中? 请说明理由.

证明. (i) 设 $V = F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}$. 则存在 $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in F$ 使得

$$\mathcal{B}(\mathbf{w}) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \mathcal{A}^i(\mathbf{w}).$$

令 $f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_{n-1} t^{n-1}$. 则 $\mathcal{B}(\mathbf{w}) = f(\mathcal{A})(\mathbf{w})$.

对任意 $\mathbf{v} \in V$, 存在 $p_{\mathbf{v}} \in F[t]$ 使得, $\mathbf{v} = p_{\mathbf{v}}(\mathcal{A})(\mathbf{w})$. 注意到 $\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{A}$ 交换蕴含 $\mathcal{B}$ 与 $F[\mathcal{A}]$ 中的元素都交换. 故

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\mathbf{v}) &= \mathcal{B} \circ p_{\mathbf{v}}(\mathcal{A})(\mathbf{w}) && (\because \mathbf{v} = p_{\mathbf{v}}(\mathcal{A})(\mathbf{w})) \\ &= p_{\mathbf{v}}(\mathcal{A})(\mathcal{B}(\mathbf{w})) && (\because \mathcal{B} \text{ 与 } F[\mathcal{A}] \text{ 中的元素都交换}) \\ &= p_{\mathbf{v}}(\mathcal{A})(f(\mathcal{A})(\mathbf{w})) && (\because f(t) \text{ 的定义}) \\ &= f(\mathcal{A})p_{\mathbf{v}}(\mathcal{A})(\mathbf{w}) && (\because F[\mathcal{A}] \text{ 是交换环}) \\ &= f(\mathcal{A})(\mathbf{v}). && (\because \mathbf{v} = p_{\mathbf{v}}(\mathcal{A})(\mathbf{w})) \end{aligned}$$

故 $\mathcal{B} = f(\mathcal{A})$.

(ii) 不能. 设 $\mathcal{A} = \mathcal{E}$, 线性算子 $\mathcal{C}$ 由 $\mathcal{C}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1$ 和 $\mathcal{C}(\mathbf{e}_i) = \mathbf{0}$, $i = 2, \dots, n$, 确定. 则 $\mathcal{A} \circ \mathcal{C} = \mathcal{C} \circ \mathcal{A}$. 注意到对任意 $p \in F[t]$ $p(\mathcal{E}) = p(1)\mathcal{E}$. 但 $\mathcal{C}$ 不是数乘算子. 故 $\mathcal{C} \neq p(\mathcal{A})$. 于是, $\mathcal{C} \notin F[\mathcal{A}]$.