中国科学院大学

试 题 专 用 纸

课程编号：B01GB003Y-B02

课程名称：线性代数II-B (期中试卷)

任课教师：李子明、李秀云、王艺森

注意事项：

1. 考试时间为120 分钟，考试方式闭卷；
2. 全部答案写在答题纸上；
3. 考试结束后，请将本试卷和答题纸、草稿纸一并交回。

1. (15分) 设 V 是域 F 上的线性空间, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 是 V 的一组基. 令

$$\epsilon_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,\ \epsilon_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2,\ \epsilon_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.$$

(i) 证明: 当 F 特征不等于 2 时, $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 是 V 的基.

(ii) 设 F 的特征不等于 2.

(a) 计算从 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 到 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 的转换矩阵.

(b) 设 $\mathbf{x} = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$. 计算 $\mathbf{x}$ 关于 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 的坐标.

解: *(i)* 我们有

$$(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P}.$$

当 F 的特征不等于 *2* 时, $\det(P) = -2 \neq 0$. 故 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 是一组基.

(ii-a) 转换矩阵是 P.

(ii-b) 设 $\mathbf{x}$ 在 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 下的坐标是 $(y_1, y_2, y_3)^t$. 则

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2. (15分) 设实二次型 $q(\mathbf{x}) = x_1x_2 - x_3^2 + 2x_3x_1$, 其中 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3$. 计算:

(i) q 的秩;

(ii) q 的一组规范基;

(iii) q 的签名.

解. *(i)* 二次型 q 在标准基下的矩阵是:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

因为 $\operatorname{rank}(A) = 3$, 所以 $\operatorname{rank}(q) = 3$.

(ii) 由行列相伴消去法得:

$$(A|E) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 & | & 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1/4 & -1/2 & | & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & -1/2 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1/4 & -1/2 & | & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & -2 & | & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 & | & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

一组规范基是矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的三个列向量. *(注. 答案不唯一)*

(iii) 签名是 $(1, 2)$.

3. (15分) 设实线性空间 $V = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(p) < 3\}$. 再设:

$$\begin{array}{rccc} \sigma: & V & \longrightarrow & V \\ & p(x) & \mapsto & p(\alpha x) \end{array} \quad \text{和} \quad \begin{array}{rccc} \Delta: & V & \longrightarrow & V \\ & p(x) & \mapsto & p(\alpha x) - p(x) \end{array},$$

其中 α 是一个固定的非零实数.

(i) 证明: σ 和 Δ 是 V 上的线性算子.

(ii) 计算: σ 和 Δ 在基底 $1, x, x^2$ 下的矩阵.

(iii) 计算 $\ker(\sigma)$ 和 $\ker(\Delta)$ 的维数.

解. *(i)* 因为赋值是环同态, 所以对任意 $f, g \in V$, $\sigma(f+g) = \sigma(f) + \sigma(g)$. 对任意 $\lambda \in \mathbb{R}$, $\sigma(\lambda f) = (\lambda f)(\alpha x) = \lambda f(\alpha x) = \lambda \sigma(f)$. 综上所述, σ 是线性算子.

因为 $\Delta = \sigma - \mathcal{E}$ 且 $\mathcal{L}(V)$ 是线性空间, 所以 Δ 也是线性算子.

(ii) 注意到 $(\sigma(1), \sigma(x), \sigma(x^2)) = (1, \alpha x, \alpha^2 x^2) = (1, x, x^2)\text{diag}(1, \alpha, \alpha^2)$. 故 σ 在 $1, x, x^2$ 下的矩阵是 $\text{diag}(1, \alpha, \alpha^2)$. 而 Δ 在同样基底下的矩阵是

$$\text{diag}(1, \alpha, \alpha^2) - E = \text{diag}(0, \alpha - 1, \alpha^2 - 1) - E.$$

(iii) 因为 $\text{rank}(\sigma) = 3$, 所以 $\dim(\ker(\sigma)) = 0$. 当 $\alpha \neq \pm 1$ 时, $\text{rank}(\Delta) = 2$. 故 $\dim(\ker(\Delta)) = 1$. 当 $\alpha = -1$ 时, $\text{rank}(\Delta) = 1$. 故 $\dim(\ker(\Delta) = 2$. 当 $\alpha = 1$ 时, $\text{rank}(\Delta) = 0$. 故 $\dim(\ker(\Delta) = 3$.

4. (10分) 设 V 是域 F 上的有限维线性空间, $\mathcal{A}$ 是 V 上的线性算子, $f \in F[t] \setminus F$ 满足 $f(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$, 其中 $\mathcal{O}$ 代表零算子, 和 $f = pq$, 其中 $p, q \in F[t]$ 满足 $\gcd(p, q) = 1$. 证明: $V = \ker(p(\mathcal{A})) \oplus \ker(q(\mathcal{A}))$.

证明. 因为 $\gcd(p, q) = 1$, 所以存在 $u, v \in F[t]$ 使得 $up + vq = 1$. 于是,

$$u(\mathcal{A})p(\mathcal{A}) + v(\mathcal{A})q(\mathcal{A}) = \mathcal{E}. \tag{1}$$

设 $\mathbf{v} \in \ker(p(\mathcal{A})) \cap \ker(q(\mathcal{A}))$. 根据 (1), 我们有 $(u(\mathcal{A})p(\mathcal{A}) + v(\mathcal{A})q(\mathcal{A}))(\mathbf{v}) = \mathcal{E}(\mathbf{v})$. 故 $u(\mathcal{A})p(\mathcal{A})(\mathbf{v}) + v(\mathcal{A})q(\mathcal{A})(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \implies \mathbf{0} = \mathbf{v}$. 于是, $\ker(p(\mathcal{A})) \cap \ker(q(\mathcal{A})) = \{\mathbf{0}\}$.

设 $\mathbf{x} \in F^n$. 令 $\mathbf{y} = u(\mathcal{A})p(\mathcal{A})(\mathbf{x})$ 和 $\mathbf{z} = v(\mathcal{A})q(\mathcal{A})(\mathbf{x})$. 则 (1) 蕴含 $\mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{x}$. 注意到:

$$\begin{aligned}
q(\mathcal{A})(\mathbf{y}) &= q(\mathcal{A})u(\mathcal{A})p(\mathcal{A})(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{y}\ \text{的定义}) \\
&= u(\mathcal{A})q(\mathcal{A})p(\mathcal{A})(\mathbf{x}) \quad (F[\mathcal{A}]\ \text{是交换环}) \\
&= u(\mathcal{A})f(\mathcal{A})(\mathbf{x}) \quad (f = pq) \\
&= u(\mathcal{A})\mathcal{O}(\mathbf{x}) \quad (f(\mathcal{A}) = \mathcal{O}) \\
&= \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

故 $\mathbf{y} \in \ker(q(\mathcal{A}))$. 同理 $\mathbf{z} \in \ker(p(\mathcal{A}))$. 于是, $\ker(q(\mathcal{A})) + \ker(p(\mathcal{A})) = V$.

综上所述, $\ker(p(\mathcal{A})) \oplus \ker(q(\mathcal{A})) = V$.

5. (10 分) 设 V 是域 F 上的 n 维线性空间, V_1, V_2, W 是 V 的子空间且满足

$$V = V_1 + V_2 \quad \text{和} \quad V = (V_1 \cap V_2) \oplus W.$$

(i) 证明: $\dim(V_1) + \dim(V_2) = 2\dim(V_1 \cap V_2) + \dim(W)$.

(ii) 证明: $V = V_1 \oplus (V_2 \cap W)$.

证明. *(i)* 由条件可知 $\dim(V_1+V_2) = \dim(V_1 \cap V_2) + \dim(W)$. 利用关于 V_1 和 V_2 的维数公式得: $\dim(V_1) + \dim(V_2) = 2\dim(V_1 \cap V_2) + \dim(W)$.

(ii) 因为 $V = (V_1 \cap V_2) \oplus W$, 所以 $(V_1 \cap V_2) \cap W = \{\mathbf{0}\}$. 故 $V_1 + (V_2 \cap W)$ 是直和. 下面只需证明: $V = V_1 + (V_2 \cap W)$.

方法 1. 因为 $V = V_1 \cap V_2 + W$ 和 $V_1 \cap V_2 \subset V_2$, 所以 $V_2 = V_1 \cap V_2 + V_2 \cap W$ (子空间模律）由此和 $V = V_1 + V_2$ 可知 $V = V_1 + V_1 \cap V_2 + V_2 \cap W = V_1 + V_2 \cap W$.

方法 2. 利用维数公式计算:

$$\begin{aligned}
\dim(V_1 + (V_2 \cap W)) &= \dim(V_1) + \dim(V_2 \cap W) \quad (\because\ V_1 \cap V_2 \cap W = \{\mathbf{0}\}) \\
&= \dim(V_1) + \dim(V_2) + \dim(W) - \dim(V_2 + W) \\
&= \dim(V) + \dim(V_1 \cap V_2) + \dim(W) - \dim(V_2 + W) \quad (\because\ V = V_1 + V_2) \\
&= 2\dim(V) - \dim(V_2 + W) \quad (\because\ V = (V_1 \cap V_2) \oplus W) \\
&\geq \dim(V).
\end{aligned}$$

因为 $V_1 + (V_2 \cap W) \subset V$, 所以上式蕴含 $V = V_1 + (V_2 \cap W)$.

6. (10分) 设 $q(\mathbf{x})$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的二次型, 其签名是 (k, l), $k > 0$, $l > 0$ 且 $k + l < n$.

(i) 证明: q 是满射.

(ii) 证明: $\mathbb{R}^n$ 中存在三个非零子空间 V^+, V^- 和 V^0 使得限制映射 $q|_{V^+}$ 正定, $q|_{V^-}$ 负定, $q|_{V^0}$ 恒等于零且 $\mathbb{R}^n = V^+ \oplus V^- \oplus V^0$.

证明. *(i).* (法 1）因为 q 是不定的, 所以存在 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ 使得 $q(\mathbf{x}) > 0$ 和 $q(\mathbf{y}) < 0$. 设 $a, \lambda \in \mathbb{R}$. 如果 $a > 0$, 则 $q(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^2 q(\mathbf{x})$. 故取 $\lambda = \sqrt{a/q(\mathbf{x})}$ 得 $q(\lambda\mathbf{x}) = a$. 如果 $a < 0$, 则 $q(\lambda\mathbf{y}) = \lambda^2 q(\mathbf{y})$. 故取 $\lambda = \sqrt{a/q(\mathbf{y})}$ 得 $q(\lambda\mathbf{x}) = a$. 再由 $q(\mathbf{0}) = 0$ 可知 q 是满射.

(法 2）设在 $\mathbb{R}^n$ 的某组规范基 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 下,

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+l}^2,$$

其中 $\mathbf{x} = x_1\epsilon_1 + \cdots + x_n\epsilon_n$. 如果 $a \in \mathbb{R}^+$, 则取 $\mathbf{x} = \sqrt{a}\,\epsilon_1$. 我们有 $q(\mathbf{x}) = a$. 如果 $a \in \mathbb{R}^-$. 则我们取 $\mathbf{x} = \sqrt{-a}\,\epsilon_{k+1}$.我们有 $q(\mathbf{x}) = a$. 再由 $q(\mathbf{0}) = 0$ 可知 q 是满射.

(ii) 利用法 2 中的符号, 令

$$V^+ = \langle \epsilon_1, \ldots, \epsilon_k \rangle, \quad V^- = \langle \epsilon_{k+1}, \ldots, \epsilon_{k+l} \rangle \quad \text{和} \quad V^0 = \langle \epsilon_{k+l+1}, \ldots, \epsilon_n \rangle.$$

则 $q|_{V^+}$ 正定, $q|_{V^-}$ 负定和 $q|_{V^0}$ 恒等于零. 因为

$$\dim(V^+)+\dim(V^-)+\dim(V^0)=k+l+n-k-l=n=\dim(V^++V^-+V^0),$$

所以三个子空间之和是直和且等于 $\mathbb{R}^n$.

7. (10分) 设 $A\in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$ 是正定的, $B\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

(i) 证明: B^tAB 对称且半正定.

(ii) 再设 A 和 B 相似. 证明: $\det(B)>0$ 且 $\mathrm{tr}(B)>0$, 其中 $\mathrm{tr}(B)$ 代表 B 的迹.

证明: *(i)* 设 $C=B^tAB$. 则 $C^t=B^tA^tB=B^tAB=C$. 故 C 对称.

因为 A 正定, 所以 $A=P^tP$, 其中 P 是可逆方阵. 于是,

$$C=B^tP^tPB=(PB)^t(PB).$$

故 C 半正定.

(ii) 因为 A 正定, 所以 $\det(A)>0$ 且 $\mathrm{tr}(A)>0$ *(*正定蕴含一阶主子式都大于零*)*. 因为行列式和迹都是相似不变量, 所以 $\det(B)>0$ 且 $\mathrm{tr}(B)>0$.

8. (15分) 设 V 是域 F 上的有限维维线性空间, $\mathcal{A}$ 是 V 上的线性算子.

(i) 证明: 对任意 $k\in\mathbb{Z}^+$, $\ker(\mathcal{A}^k)\subseteq\ker(\mathcal{A}^{k+1})$.

(ii) 证明: 如果存在 $k\in\mathbb{Z}^+$ 使得 $\ker(\mathcal{A}^k)=\ker(\mathcal{A}^{k+1})$, 则对任意 $l>k$,

$$\ker(\mathcal{A}^k)=\ker(\mathcal{A}^l).$$

(iii) 设 $\mathcal{A}$ 的极小多项式 $\mu_{\mathcal{A}}(t)=p(t)q(t)$, 其中 $p,q\in F[t]$ 且 $\gcd(p,q)=1$. 证明: $\ker(p(\mathcal{A}))$ 是关于 $q(\mathcal{A})$ 的不变子空间且 $q(\mathcal{A})$ 限制在 $\ker(p(\mathcal{A}))$ 上是可逆的.

证明: *(i)* 设 $\mathbf{x}\in\ker(\mathcal{A}^k)$. 则 $\mathcal{A}^k(\mathbf{x})=\mathbf{0}$. 故 $\mathcal{A}^{k+1}(\mathbf{x})=\mathcal{A}(\mathbf{0})=\mathbf{0}$. 由此得到 $\ker(\mathcal{A}^k)\subseteq\ker(\mathcal{A}^{k+1})$.

(ii) 对 l 归纳. 当 $l=1$ 时, 结论显然. 设 $l>1$ 且

$$\ker(\mathcal{A}^k)=\ker(\mathcal{A}^{k+1})=\cdots=\ker(\mathcal{A}^{k+l-1}).$$

由 *(i)* 可知 $\ker(\mathcal{A}^{k+l-1})\subset\ker(\mathcal{A}^{k+l})$. 设 $\mathbf{x}\in\ker(\mathcal{A}^{k+l})$. 则 $\mathcal{A}^{k+l}(\mathbf{x})=\mathbf{0}$. 故 $\mathcal{A}(\mathbf{x})\in\ker(\mathcal{A}^{k+l-1})$. 由归纳假设, $\mathcal{A}(\mathbf{x})\in\ker(\mathcal{A}^{k+l-2})$. 故 $\mathcal{A}^{k+l-1}(\mathbf{x})=\mathbf{0}$. 即 $\mathbf{x}\in\ker(\mathcal{A}^{k+l-1})$. 于是, $\ker(\mathcal{A}^{k+l-1})=\ker(\mathcal{A}^{k+l})$. 再由归纳假设, $\ker(\mathcal{A}^k)=\ker(\mathcal{A}^l)$.

(iii) 因为 $p(\mathcal{A})q(\mathcal{A}) = q(\mathcal{A})p(\mathcal{A})$, 所以 $\ker(p(\mathcal{A}))$ 是关于算子 $q(\mathcal{A})$ 的不变子空间. 于是, $q(\mathcal{A})$ 是 $\ker(p(\mathcal{A}))$ 上的线性算子. 因为 $\gcd(p, q) = 1$, 所以存在 $u, v \in F[t]$ 使得 $u(t)p(t) + v(t)q(t) = 1$. 故 $u(\mathcal{A})p(\mathcal{A}) + v(\mathcal{A})q(\mathcal{A}) = \mathcal{E}$.

对任意 $\mathbf{x} \in \ker(p(\mathcal{A}))$,

$$u(\mathcal{A})p(\mathcal{A})(\mathbf{x}) + v(\mathcal{A})q(\mathcal{A})(\mathbf{x}) = \mathcal{E}(\mathbf{x}) \implies v(\mathcal{A})q(\mathcal{A})(\mathbf{x}) = \mathbf{x}.$$

故 $q(\mathcal{A})$ 在 $\ker(p(\mathcal{A}))$ 的逆是 $v(\mathcal{A})$.