

习题. 设 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. 证明: $(AB)^n \sim_s (BA)^n$.

断言 1. 设 F 是域. 如果 $A \in GL_n(F)$ 和 $B \in M_n(F)$, 则

$$(AB)^n \sim_s (BA)^n.$$

证明. $A^{-1}(AB)^n A = (BA)^n \implies (AB)^n \sim_s (BA)^n$. $\square$

断言 2. 矩阵 $(AB)^n$ 和 $(BA)^n$ 有相同的特征多项式.

证明. 如果 A 可逆, 则 $(AB)^n$ 和 $(BA)^n$ 有相同的特征多项式 (断言 1 和特征多项式是相似不变量).

设 A 不可逆. 令 u 是 F 上一个未定元. 则 $uE + A$ 是 $F(u)$ 上的可逆矩阵. 故

$$|tE - ((uE + A)B)^n| = |tE - (B(uE + A))^n|.$$

因为上述等式是关于 t 和 u 的多项式的等式, 所以当 $u = 0$ 时等式也成立. 于是, $|tE - (AB)^n| = |tE - (BA)^n|$. $\square$

断言 3. 矩阵

$$\begin{pmatrix} (AB)^n & O \\ B & O \end{pmatrix}_{2n \times 2n} \sim_s \begin{pmatrix} O & O \\ B & (BA)^n \end{pmatrix}_{2n \times 2n}.$$

证明. 直接计算得:

$$\begin{pmatrix} (AB)^n & O \\ B & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & (AB)^{n-1}A \\ O & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (AB)^n & (AB)^{2n-1}A \\ B & (BA)^n \end{pmatrix}$$

和

$$\begin{pmatrix} E & (AB)^{n-1}A \\ O & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & O \\ B & (BA)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (AB)^n & (AB)^{2n-1}A \\ B & (BA)^n \end{pmatrix}.$$

($\because (AB)^{n-1}A(BA)^n = (AB)^{n-1} \underbrace{AB \cdots AB}_n A$.)

注意到 $\begin{pmatrix} E & (AB)^{n-1}A \\ O & E \end{pmatrix}$ 可逆, 故

$$\begin{pmatrix} (AB)^n & O \\ B & O \end{pmatrix} \sim_s \begin{pmatrix} O & O \\ B & (BA)^n \end{pmatrix}. \quad \square$$

断言 4. 设 $\lambda \in \text{spec}_{\mathbb{C}}((AB)^n)$ 且 $\lambda \neq 0$. 则对任意 $k \in \mathbb{N}$,

$$\text{rank}((\lambda E - (AB)^n)^k) = \text{rank}((\lambda E - (BA)^n)^k).$$

证明. 根据断言 2 和 3, λ 是 C 和 D 的特征根, 其中

$$C = \begin{pmatrix} (AB)^n & O \\ B & O \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad D = \begin{pmatrix} O & O \\ B & (BA)^n \end{pmatrix}.$$

因为 $C \sim_s D$, 所以对任意 $k \in \mathbb{N}$,

$$\text{rank}((\lambda E_{2n} - C)^k) = \text{rank}((\lambda E_{2n} - D)^k).$$

即

$$\text{rank} \begin{pmatrix} (\lambda E_n - (AB)^n)^k & O \\ * & \lambda^k E_n \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} \lambda^k E_n & O \\ * & (\lambda E_n - (BA)^n)^k \end{pmatrix}.$$

因为 $\lambda \neq 0$, 所以上述秩等式等价于

$$\text{rank}(\lambda E_n - (AB)^n)^k + n = n + \text{rank}(\lambda E_n - (BA)^n)^k.$$

故 $\text{rank}(\lambda E_n - (AB)^n)^k = \text{rank}(\lambda E_n - (BA)^n)^k$.

断言 5. $\text{rank}((AB)^n) = \text{rank}((AB)^{n+1})$.

证明. 对任意 $M \in M_n(F)$, 我们有

$$\text{rank}(M^0) \geq \text{rank}(M) \geq \text{rank}(M^2) \geq \cdots,$$

和 $\text{rank}(M^k) = \text{rank}(M^{k+1})$ 蕴含 $\text{rank}(M^k) = \text{rank}(M^{k+l})$,
 $l = 1, 2, 3, \dots$. 故 $\text{rank}(M^n) = \text{rank}(M^{n+1})$. $\square$

断言 6. $\text{rank}((AB)^n) = \text{rank}((BA)^n)$.

证明. 根据断言 5,

$$\text{rank}((AB)^n) = \text{rank}((AB)^{n+1}) = \text{rank}(A(BA)^n B).$$

故 $\text{rank}((AB)^n) \geq \text{rank}((BA)^n)$. 同理可证

$$\text{rank}((BA)^n) \geq \text{rank}((AB)^n). \quad \square$$

根据断言 2, $(BA)^n$ 和 $(AB)^n$ 有共同的特征多项式.
根据断言 6 和 5 可知, $\text{rank}((AB)^{nk}) = \text{rank}((BA)^{nk})$ 对所有非负整数成立. 再利用断言 4 可知, $(AB)^n \sim_s (BA)^n$. $\square$