2025年10月10日 星期五 14:14

作业 1.

1. $a\alpha_1^3+b\alpha_1^2+c\alpha_1+d=\beta_1$

$a\alpha_2^3+b\alpha_2^2+c\alpha_2+d=\beta_2$

$a\alpha_3^3+b\alpha_3^2+c\alpha_3+d=\beta_3$

$a\alpha_4^3+b\alpha_4^2+c\alpha_4+d=\beta_4$

系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1^3&\alpha_1^2&\alpha_1&1\\ \alpha_2^3&\alpha_2^2&\alpha_2&1\\ \alpha_3^3&\alpha_3^2&\alpha_3&1\\ \alpha_4^3&\alpha_4^2&\alpha_4&1\end{pmatrix}$

增广矩阵 $\left(A\,\middle|\,\begin{matrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\\ \beta_4\end{matrix}\right)$，不要把 d"搬到右边"，d是变元！

2 证明第2个 $(x+y)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i}y^i$，用归纳法

① $n=1$时 $(x+y)^1=x+y$ 成立

② 假设当 $n<k$ 时成立，当$n=k$时

$(x+y)^k=(x+y)(x+y)^{k-1}$

$=(x+y)\left(\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}x^{k-1-i}y^i\right)$

$=\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}x^{k-i}y^i+\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}x^{k-1-i}y^{i+1}$

$=\binom{k-1}{0}x^ky^0+\binom{k-1}{1}x^{k-1}y+\cdots+\binom{k-1}{k-1}x\cdot y^{k-1}$

$+\binom{k-1}{0}x^{k-1}y+\cdots+\binom{k-1}{k-2}x\cdot y^{k-1}+\binom{k-1}{k-1}x^0y^k$

借助组合数公式：$\binom{n}{m}+\binom{n}{m+1}=\binom{n+1}{m+1}$ $(n\geq m+1)$

$=x^k+\binom{k}{1}x^{k-1}y+\cdots+\binom{k}{k-1}x\cdot y^{k-1}+y^k$

$=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x^{k-i}y^i$

更简洁一点：$=x^k+\sum_{i=1}^{k-1}\binom{k-1}{i}x^{k-i}y^i+\sum_{i=0}^{k-2}\binom{k-1}{i}x^{k-1-i}y^{i+1}+y^k$

$=x^k+\sum_{i=1}^{k-1}\binom{k-1}{i}x^{k-i}y^i+\sum_{i=1}^{k-1}\binom{k-1}{i-1}x^{k-i}y^i+y^k$

$=x^k+\sum_{i=1}^{k-1}\binom{k}{i}x^{k-i}y^i+y^k$

$=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x^{k-i}y^i$

3. $\begin{cases}x_2+x_3+x_4=1\\ x_1+x_3+x_4=2\\ x_1+x_2+x_4=3\\ x_1+x_2+x_3=4\end{cases}$

方程对应的增广矩阵为

$$\begin{pmatrix}0&1&1&1&1\\1&0&1&1&2\\1&1&0&1&3\\1&1&1&0&4\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{对换(1)(2)行}}\begin{pmatrix}1&0&1&1&2\\0&1&1&1&1\\1&1&0&1&3\\1&1&1&0&4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-(1)+(3),\,-(1)+(4)}\begin{pmatrix}1&0&1&1&2\\0&1&1&1&1\\0&1&-1&0&1\\0&1&0&-1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{-(2)+(3),\,-(2)+(4)}\begin{pmatrix}1&0&1&1&2\\0&1&1&1&1\\0&0&-2&-1&0\\0&0&-1&-2&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}(3)+(4)}\begin{pmatrix}1&0&1&1&2\\0&1&1&1&1\\0&0&-2&-1&0\\0&0&0&-\frac{3}{2}&1\end{pmatrix}$$

注意判断线性方程组相容和确定性时
一定是对增广矩阵作变换。

反例 $\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&1&2\\0&1&1&1&1\\0&0&-2&-1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$ 相容

$\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&1&2\\0&1&1&1&1\\0&0&-2&-1&0\\0&0&0&0&1\end{array}\right)$ 不相容

2. 把矩阵变换的过程写出来，这一部分不要省略。

Ex. 判断线性方程组的相容与确定性

$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+4x_4=-3\\ x_1+2x_2\quad-5x_4=1\\ 3x_1-x_2-x_3=1\\ x_1\quad+x_3+2x_4=-1\end{cases}$ 相容且确定

$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+4x_4=-3\\ x_1+2x_2\quad-5x_4=1\\ 2x_1+4x_2-3x_3-19x_4=6\\ 3x_1+6x_2-3x_3-24x_4=7\end{cases}$ 相容但不确定

$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+4x_4=-3\\ x_1+2x_2\quad-5x_4=1\\ 2x_1+4x_2-3x_3-19x_4=6\\ 3x_1+6x_2-3x_3-24x_4=6\end{cases}$ 不相容

4. 设该齐次线性方程组为

$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\ \quad\vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0\end{cases}$ 记 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \vdots&&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$

由题意 $\begin{cases}x_1=\alpha_1\\ \vdots\\ x_n=\alpha_n\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x_1=\beta_1\\ \vdots\\ x_n=\beta_n\end{cases}$ 是两组解

则 $A\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$，$A\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$

则 $A\begin{pmatrix}u\alpha_1+v\beta_1\\ \vdots\\ u\alpha_n+v\beta_n\end{pmatrix}=u\cdot A\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}+v\cdot A\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}=0$

故 $\begin{cases}x_1=u\alpha_1+v\beta_1\\ \vdots\\ x_n=u\alpha_n+v\beta_n\end{cases}$ 是方程的解.

补充.

1 数学归纳法.

原理：N为自然数集合，假设对 $\forall n\in N$，
我们有某一命题 $M(n)$，又假设我们有一个法则：
对于任意给定 l，只要 $M(k)$ 对所有 $k<l$ 真就可以
证明 $M(l)$ 真，特别指出，$M(0)$真.
则对任意 $n\in N$，$M(n)$真.

证明：设 $S=\{n\mid n\in N, M(n)\text{不真}\}\subset N$
若 $S\neq\phi$，则S存在一个极小元 n_0，$M(n_0)$不真，$n_0\geq1$
由n_0极小性，我们得出 $M(k)$ 真 $(1\leq k<n_0)$
再由假设 $M(n_0)$真，矛盾.

一般当我们使用数学归纳法证明某一命题时.
① $n=0$ (或$n=1$) 成立
② 假设 $n<k$ ($n=k-1$)时成立，试图证明 $n=k$ 时成立。
※. 一般情形是证明$n=1$成立. 由$n=1$成立证明$n=2$成立
由$n=1,2$成立 证明$n=3$成立
由$n=1,2,3$成立证明$n=4$成立
……

可能遇到如下情形：
$n=1$ 成立 ✓
$n=1$ 成立 $\Rightarrow$ $n=2$ 成立 ✓
$n=1,2$成立 $\Rightarrow$ $n=3$成立 ✗
但$n=1,2$成立 $\Rightarrow$ $n=4$成立 ✓
$n=1,2,4$成立 $\Rightarrow$ $n=3$成立 ✓
$n=1,2,3,4$ 成立 $\Rightarrow$ $n=5$ 成立 ✗
$n=1,2,3,4$ 成立 $\Rightarrow$ $n=8$成立 ✓
$n=1,2,3,4,8$ 成立 $\Rightarrow$ $n=7$ 成立 ✓
$n=1,2,3,4,7,8$成立 $\Rightarrow$ $n=6$ 成立 ✓
$n=1,2,3,4,6,7,8$ 成立 $\Rightarrow$ $n=5$ 成立 ✓

经典例子：证明n元均值不等式：$a_1,a_2\cdots a_n\geq0$，则 $\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$

① 证明 $n=2^k$ $(k\geq0)$ 成立
$k=0$时 $n=1$ $a_1\geq a_1$
$k=1$时 $n=2$ $a_1+a_2\geq2\sqrt{a_1a_2}$
$k=2$时 $n=4$ $a_1+a_2+a_3+a_4\geq2\sqrt{a_1a_2}+2\sqrt{a_3a_4}\geq2\sqrt{2\cdot2\cdot\sqrt{a_1a_2a_3a_4}}=4\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}$

② 假设不等式对 $n+1$ 成立
记 $A=\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$，则 $A=\frac{nA+A}{n+1}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+A}{n+1}\geq\sqrt[n+1]{a_1\cdots a_n\cdot A}$
$A^{n+1}\geq a_1a_2\cdots a_n\cdot A$
$A\geq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ "=" 成立 $\Longleftrightarrow$ $a_1=a_2=\cdots=a_n$

2. 集合的势

定义1. 设 A,B为两个集合，如果 $\exists$ 一一映射 $f:A\to B$，
则称 A与B有相同的势，或称A与B等势。
有限集的势就是它的元素个数。

定义2. 如果存在从自然数集N到集合S的一一映射，
则称S可数无穷，可数集包括有限集与可数无穷集.

例1. $f: N\to 2N=\{0,2,4,6,\cdots\}$
$x\to2x$
f为一一映射，故称 N与$2N$等势，尽管看上去
N的元素个数比$2N$要多.

例2. 正有理数是可数无穷的.

写出所有有理数
$$\begin{array}{ccccc}\frac{1}{1}&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}&\frac{1}{4}&\cdots\\ \frac{2}{1}&\frac{2}{2}&\frac{2}{3}&\frac{2}{4}&\cdots\\ \frac{3}{1}&\frac{3}{2}&\frac{3}{3}&\frac{3}{4}&\cdots\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{array}$$

按斜线遍历，顺序为 $\frac{1}{1}$，$\frac{1}{2}$ $\frac{2}{1}$，$\frac{1}{3}$ $\frac{2}{2}$ $\frac{3}{1}$，$\frac{1}{4}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{4}{1}$，
由此得到的序列可以编号为 $0,1,2,3\cdots$
故这一序列与N等势，故可数无穷
而有理数集为这一序列的子序列(除去重复部分 如 $\frac{1}{1}=\frac{2}{2}$)
仍为可数无穷的。

※ 例3. 无理数集为不可数集，它的元素个数比有理数"多得多".

Ex. 任意一个映射可写成一个单射和满射的复合.
即 $\forall f: A\to B$ 为映射，f可表为 $f=g\circ h$
h为满射，g为单射.