2025年12月8日 星期一 15:33

习题课 十

作业

1. $$A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{(1)\Leftrightarrow(2)}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{1\times(1)+(3)}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{1\times(2)+(3)}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&1\\0&0&2\end{pmatrix}$$ A可逆

$$\left(A\mid E_3\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&-1&1&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\-1&1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{(1)\Leftrightarrow(2)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&0\\0&-1&1&1&0&0\\-1&1&0&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{1\times(1)+(3)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&0\\0&-1&1&1&0&0\\0&1&1&0&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{1\times(2)+(3)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&0\\0&-1&1&1&0&0\\0&0&2&1&1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{2}\times(3)+(2)]{-\frac{1}{2}\times(3)+(1)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&-1&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&2&1&1&1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

故 $$A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

2. (i) 对 $\forall i\in\{1,\dots,n\}$, $a_{ii}\neq 0 \Longleftrightarrow$ A的n列线性无关

$\Longleftrightarrow n=\operatorname{rank}A$

(ii) 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 为两个上三角矩阵,

设 $C=AB=(C_{pq})_{n\times n}$

n

设 $C = AB = (C_{pq})_{n\times n}$

$C_{pq} = \sum_{k=1}^{n} a_{pk} b_{kq}$ 当 $p<k$ 时 $a_{pk}=0$
$k<q$ 时 $b_{kq}=0$

$(1 \le p, q \le n)$

若 $p<q$，则 $p \ge k$ 和 $k \ge q$ 无法同时成立，故 $C_{pq}=0$ $(1\le p<q\le n)$

(iii) 对 n 作归纳

① $n=1$ 的情况显然

② 假设 $n-1$ 时命题成立，对 n 的情形。

$$A_n = \begin{pmatrix} A_{n-1} & * \\ 0 & a_n \end{pmatrix}$$ ，A_{n-1} 为可逆上三角矩阵，它的逆记为 A_{n-1}^{-1}，

$$\begin{pmatrix} A_{n-1} & * \\ 0 & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & \beta_{n-1\times 1} \\ \alpha_{1\times n-1} & b_n \end{pmatrix} = E_n$$

$\Longrightarrow a_n b_n = 1$，由 $a_n \ne 0 \Longrightarrow b_n = a_n^{-1}$

$0\cdot B + a_n\cdot\alpha = 0$，$a_n \ne 0 \Longrightarrow \alpha = 0$

$\Longrightarrow A_{n-1}\cdot B = E_{n-1}$，$B = A_{n-1}^{-1}$

故 A_n 的逆矩阵形如 $\begin{pmatrix} A_{n-1}^{-1} & \beta \\ 0 & a_n^{-1} \end{pmatrix}$ 为上三角矩阵

(方法不唯一，通过求逆矩阵过程也能看出逆为上三角矩阵)

3 证明：$A\cdot A^2 = A^2 A = E$，故 A 可逆且 $A^{-1} = A^2$

4 (i) 证明：设 $r = \operatorname{rank} A$，则存在可逆矩阵 P 和 Q，s.t

$$A = P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q = P(E_{11}+E_{22}+\cdots+E_{rr})Q$$
$$= \sum_{i=1}^{r} P E_{ii} Q$$

(E_{ij} 表示第 i 行 j 列分量为 1，其余分量为 0 的矩阵)

由于 P, Q 可逆，故 $\operatorname{rank}(PE_{ii}Q) = \operatorname{rank}(E_{ii}) = 1$

(ii) 证明：

设 A 的 n 个列向量为 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$，$\operatorname{rank} A = s \le n$

设 B 的 n 个列向量为 $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$，$\operatorname{rank} B = t \le n$

设 B 的 n 个列向量为 $\{\beta_1,\beta_2\cdots\beta_n\}$，$\text{rank}B=t\le n$

不妨设 $\{e_1,e_2\cdots e_s\}$ 为 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 的极大线性无关组
$\{\beta_1\cdots\beta_t\}$ 为 $\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$ 的极大线性无关组

则 $\{e_1,e_2\cdots e_s,\beta_1\cdots,\beta_t\}$ 可表出 $\{e_1\cdots e_n,\beta_1\cdots\beta_n\}$

故 $\text{rank}(A+B)\le s+t=\text{rank}A+\text{rank}B$

由此知 A 不可能写成 k 个秩等于 1 的矩阵之和。

5. 证明：

① 设 $\text{rank}(A)=s$，$\text{rank}(B)=t$，若 $A=\begin{pmatrix}E_s&0\\0&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}E_t&0\\0&0\end{pmatrix}$

令 $P=\begin{pmatrix}0&E_{n-t}\\E_t&0\end{pmatrix}$ $\quad APB=A\cdot\begin{pmatrix}0&0\\E_t&0\end{pmatrix}=0$

② 对一般的 $A,B\in M_n(R)$，

设 $A=P_1\begin{pmatrix}E_s&0\\0&0\end{pmatrix}Q_1$，$B=P_2\begin{pmatrix}E_t&0\\0&0\end{pmatrix}Q_2$

P_1,P_2,Q_1,Q_2 为可逆矩阵，取 P' 为①中矩阵满足 $\begin{pmatrix}E_s&0\\0&0\end{pmatrix}P'\begin{pmatrix}E_t&0\\0&0\end{pmatrix}=0$

则 $P=Q_1^{-1}P'P_2^{-1}$ 满足 $APB=0$.

练习

(1,2为作业题5的拓展)

1. $A\in M_n(R)$，则 A 不可逆 $\Longleftrightarrow\ \exists\, B\in M_n(R)$，$B\ne0$，$AB=0$

2. 设 $A\in M_n(R)$ 为 n 阶实反对称矩阵，则 I_n-A 可逆.

证：由 1 知 $\exists$ 非零实列向量 α，s.t. $(A-I_n)\alpha=0$ $\quad A\alpha=\alpha$

$$\alpha^TA\alpha=\alpha^T\alpha$$

$$\alpha^TA\alpha=(\alpha^TA\alpha)^T=\alpha^TA^T\alpha=-\alpha^TA\alpha\Rightarrow\alpha^TA\alpha=0\Rightarrow\alpha=0$$

矛盾.

3、设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 求 A^{-1}

解：$(A|I_n)=\left(\begin{array}{ccccc|cccc} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 & & & \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & & 1 & & \\ \vdots & 1 & 0 & & \vdots & & & 1 & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & & & & \ddots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & & & & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{下面行加到1}}$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} n-1 & n-1 & \cdots & n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 0 & & 1 & & 1 & & \\ & & 0 & & & & 1 & \\ & 1 & & \ddots & & & & \ddots \\ & & & 0 & & & & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & \cdots & 1 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ & 0 & & 1 & & 1 & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & 1 & & 0 & & & & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 1 & \cdots & 1 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ & -1 & & & \frac{1}{1-n} & \frac{n-2}{n-1} & \frac{1}{1-n} & \cdots & \frac{1}{1-n} \\ & & -1 & & \frac{1}{1-n} & \frac{1}{1-n} & \frac{n-2}{n-1} & \cdots & \frac{1}{1-n} \\ & & & \ddots & \vdots & & & \ddots & \\ & & & -1 & \frac{1}{1-n} & \cdots & & \cdots & \frac{n-2}{n-1} \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & & & & \frac{2-n}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ & -1 & & & \frac{1}{1-n} & \frac{n-2}{n-1} & \frac{1}{1-n} \cdots & \frac{1}{1-n} \\ & & \ddots & & \vdots & \frac{1}{1-n} & \frac{n-2}{n-1} & \frac{1}{1-n} \\ & & & -1 & \frac{1}{1-n} & \cdots & \cdots & \frac{n-2}{n-1} \end{array}\right)$$

$$A^{-1}=\frac{1}{n-1}\begin{pmatrix} 2-n & & & 1 \\ & 2-n & & \\ & & 2-n & \\ & 1 & & \ddots \\ & & & & 2-n \end{pmatrix}$$

4 设 $A=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$ $a_i\neq 0$，求 A^{-1}

4. 设 $A=\begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{pmatrix}$ $a_i\neq 0$，求 A^{-1}

5. 证明：不存在 $A,B\in M_n(\mathbb{R})$，$AB-BA=kI_n$ $(k\neq 0)$.
（取迹）