

第十一次作业解答

习题 1. 计算下列行列式的值。

(i)

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

解： 将第一行乘以 -1 分别加到第二、三、四行：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

按第一列展开：

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}$$

计算：

$$\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 0 - (-2) \cdot (-2) = 0 - 4 = -4$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-2) - 0 \cdot (-2) = 4$$

所以原行列式为

$$0 - (-2) \cdot (-4) + (-2) \cdot 4 = 0 - 8 - 8 = -16$$

故答案为 $\boxed{-16}$ 。

(ii)

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

解：按第一列展开：

$$\det = (-1)^{2+1} \cdot 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

计算三阶行列式，按第三列展开：

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 8 \cdot (-1)^{1+3} \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 8 \cdot (1+1) = 16$$

所以原行列式为 $-3 \times 16 = -48$ ，即 $\boxed{-48}$ 。

习题 2. 展开下列行列式：

(i)

$$D_n = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{pmatrix}.$$

解：我们先对矩阵做初等变换。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{pmatrix}$$

将第二列至第 n 列加到第一列：

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ \frac{n(n+1)}{2} & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{n(n+1)}{2} & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \frac{n(n+1)}{2} & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{pmatrix}$$

将行列式提出第一列的因子 $\frac{n(n+1)}{2}$ 。原矩阵变为：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{pmatrix}$$

从最后一行开始往上依次用上一行去减下一行：

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

现在我们可以按第一列展开提出 1，转而计算如下矩阵的行列式：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

类似地，先将第二列至第 $n-1$ 列加到第一列，

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

再将第一列加到第二列至第 $n-1$ 列，

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -n & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

我们现在将不断按最后一行展开，来计算该行列式：

$$\begin{aligned}
 & ((-1)^{(n-1)+1} \times (-1))((-1)^{(n-2)+1} \times (-n)) \cdots ((-1)^{1+1} \times (-n)) \\
 &= (-1)^{\sum_{i=2}^n i} \times (-1)^{n-1} \times n^{n-2} \\
 &= (-1)^{\frac{(n-1)(n+2)}{2} + (n-1)} \times n^{n-2} \\
 &= (-1)^{\frac{(n-1)n}{2} + 2(n-1)} \times n^{n-2} \\
 &= (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} \times n^{n-2}
 \end{aligned}$$

(上面计算中写“ $\times$ ”是为了方便读者区分行列式展开中的符号部分和因子部分，在本课程的计算中，需要乘法的地方大家尽量写“ $\cdot$ ”。)

现在将之与先前提出的因子相乘即得

$$D_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{n^{n-1}(n+1)}{2}.$$

(ii)

$$\Delta_n = \det \begin{pmatrix} 2a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a^2 & 2a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 2a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a^2 & 2a \end{pmatrix}.$$

解：按第一行展开得递推关系：

$$\Delta_n = 2a\Delta_{n-1} - a^2\Delta_{n-2}, \quad n \geq 3.$$

初始值 $\Delta_1 = 2a$, $\Delta_2 = 3a^2$ 。递推关系即 $(\Delta_n - a\Delta_{n-1}) = a(\Delta_{n-1} - a\Delta_{n-2})$ 有初始值 $\Delta_2 - a\Delta_1 = a^2$ ，故 $\Delta_n - a\Delta_{n-1} = a^n$ 。不难发现，对 $2 \leq j \leq n$ ，都有

$$a^{n-j}(\Delta_j - a\Delta_{j-1}) = a^n$$

将这 $n-1$ 个等式加起来，得到

$$\Delta_n = (n+1)a^n.$$

习题 3.

$$D_{2n} = \det \begin{pmatrix} a_1 & & & & & b_1 \\ & a_2 & & & & b_2 \\ & & \ddots & & & \\ & & & a_n & b_n & \\ & & & c_n & d_n & \\ & & \ddots & & & \\ & & & & & \\ & c_2 & & & & d_2 \\ & & & & & \\ c_1 & & & & & d_1 \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^n \det \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}.$$

证明：对阶数 $2n$ 进行归纳。当 $n = 1$ 时，矩阵为 $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ ，结论显然成立。

假设结论对 $2(n-1)$ 阶矩阵成立。记 $2n$ 阶矩阵为 M_{2n} ，其行列式为 D_{2n} 。按第一列展开：第一列中仅第 1 行和第 $2n$ 行非零，分别为 a_1 和 c_1 ，故

$$D_{2n} = a_1 \cdot (-1)^{1+1} \det(N) + c_1 \cdot (-1)^{2n+1} \det(P) = a_1 \det(N) - c_1 \det(P),$$

其中 N 为划去第 1 行第 1 列后的 $(2n-1)$ 阶矩阵， P 为划去第 $2n$ 行第 1 列后的 $(2n-1)$ 阶矩阵。

计算 $\det(N)$ ： N 的最后一列（原矩阵第 $2n$ 列）中，非零元仅有 d_1 （位于原第 $2n$ 行）。在 N 中，该行行号为 $2n-1$ 。按最后一列展开：

$$\det(N) = d_1 \cdot (-1)^{(2n-1)+(2n-1)} \det(N') = d_1 \det(N'),$$

其中 N' 为 N 划去最后一行和最后一列得到的 $(2n-2)$ 阶矩阵。易见 N' 是由原矩阵去掉第 1 行、第 $2n$ 行、第 1 列、第 $2n$ 列所得，其结构与 $M_{2(n-1)}$ 相同，对应参数 $a_2, \dots, a_n, b_2, \dots, b_n, c_2, \dots, c_n, d_2, \dots, d_n$ 。由归纳假设，

$$\det(N') = D_{2(n-1)} = \prod_{i=2}^n \det \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}.$$

计算 $\det(P)$ ： P 的第一行（原第 1 行）中，非零元仅有 b_1 位于最后一列。按第一行展开：

$$\det(P) = b_1 \cdot (-1)^{1+(2n-1)} \det(P') = b_1 \det(P'),$$

其中 P' 为 P 划去第一行和最后一列得到的 $(2n-2)$ 阶矩阵。易见 P' 与 N' 相同, 故 $\det(P') = D_{2(n-1)}$ 。因此 $\det(P) = b_1 D_{2(n-1)}$ 。

代入得

$$D_{2n} = a_1 d_1 D_{2(n-1)} - c_1 b_1 D_{2(n-1)} = (a_1 d_1 - b_1 c_1) D_{2(n-1)}.$$

由归纳假设, $D_{2(n-1)} = \prod_{i=2}^n \det \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}$, 所以

$$D_{2n} = \prod_{i=1}^n \det \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}.$$

归纳法完成, 证毕。

习题 4. 设 $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$, 则

$$\text{rank}(AB) + \text{rank}(BC) - \text{rank}(B) \leq \text{rank}(ABC).$$

证明: 构造分块矩阵

$$M = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & ABC \end{pmatrix}.$$

对 M 进行初等变换:

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & ABC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & C \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & BC \\ 0 & ABC \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -A & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & BC \\ 0 & ABC \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & BC \\ -AB & 0 \end{pmatrix}.$$

因为初等变换不改变矩阵的秩, 所以

$$\text{rank}(M) = \text{rank} \begin{pmatrix} B & BC \\ -AB & 0 \end{pmatrix}.$$

又因为 M 为块对角矩阵, 故 $\text{rank}(M) = \text{rank}(B) + \text{rank}(ABC)$, 即

$$\text{rank}(B) + \text{rank}(ABC) = \text{rank} \begin{pmatrix} B & BC \\ -AB & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

我们还知道关于矩阵分块秩的不等式:

$$\text{rank} \begin{pmatrix} B & BC \\ -AB & 0 \end{pmatrix} \geq \text{rank}(AB) + \text{rank}(BC). \quad (2)$$

结合 (1) 和 (2), 得

$$\text{rank}(B) + \text{rank}(ABC) \geq \text{rank}(AB) + \text{rank}(BC),$$

移项即得所证不等式。

习题 5. 设 $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ 且对任意 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, 有

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|.$$

证明: $\det(A) \neq 0$ 。

证明 (方法一): 假设 $\det(A) = 0$, 则存在非零向量 $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$ 使得 $Ax = 0$ 。设 $|x_k| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| > 0$ 。考虑第 k 个方程:

$$\sum_{j=1}^n a_{kj}x_j = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{kk}x_k = -\sum_{j \neq k} a_{kj}x_j.$$

两边取绝对值, 并由三角不等式得

$$|a_{kk}||x_k| \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}||x_j| \leq \left(\sum_{j \neq k} |a_{kj}| \right) |x_k|.$$

由于 $|x_k| > 0$, 可约去, 得

$$|a_{kk}| \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}|,$$

与严格对角占优条件矛盾。故假设不成立, 必有 $\det(A) \neq 0$ 。

证明 (方法二): 对 n 做归纳: 首先 $n = 1$ 时, 由 $|a_{11}| > 0$ 知 $\det(A) \neq 0$, 命题成立。

现假设命题对 $n-1$ ($n \geq 2$) 成立, 我们对 A 做初等变换, 从第二行开始, 对第 i ($2 \leq i \leq n$) 行, 减去第一行的 $\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ 倍, 从而得到:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} & a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{13} & \cdots & a_{2(n-1)} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1(n-1)} & a_{2n} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2} - \frac{a_{n1}}{a_{11}}a_{12} & a_{n3} - \frac{a_{n1}}{a_{11}}a_{13} & \cdots & a_{n(n-1)} - \frac{a_{n1}}{a_{11}}a_{1(n-1)} & a_{nn} - \frac{a_{n1}}{a_{11}}a_{1n} \end{pmatrix}$$

由 $|a_{11}| > \sum_{j=2}^n |a_{1j}| \geq 0$, 按第一列展开行列式, 我们只需证明如下矩阵的行列式不等于 0:

$$\begin{pmatrix} a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} & a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{13} & \cdots & a_{2(n-1)} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1(n-1)} & a_{2n} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n2} - \frac{a_{n1}}{a_{11}}a_{12} & a_{n3} - \frac{a_{n1}}{a_{11}}a_{13} & \cdots & a_{n(n-1)} - \frac{a_{n1}}{a_{11}}a_{1(n-1)} & a_{nn} - \frac{a_{n1}}{a_{11}}a_{1n} \end{pmatrix}$$

我们现在证明对该矩阵，其满足命题的条件：对每个 $2 \leq i \leq n$ ，我们由三角不等式知道

$$|a_{ii} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1i}| \geq |a_{ii}| - |\frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1i}|$$

由 $|a_{11}| > \sum_{j=2}^n |a_{1j}|$,

$$(1 - \sum_{j=2}^n |\frac{a_{1j}}{a_{11}}|)|a_{i1}| \geq 0$$

再由 $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$,

$$\begin{aligned} |a_{ii} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1i}| &\geq |a_{ii}| - |\frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1i}| \\ &> \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| - |\frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1i}| \\ &\geq \sum_{j=2, j \neq i}^n |a_{ij}| + |a_{i1}| - |\frac{a_{1i}}{a_{11}}a_{i1}| \\ &\geq \sum_{j=2, j \neq i}^n |a_{ij}| + |a_{i1}|(1 - |\frac{a_{1i}}{a_{11}}|) \\ &\geq \sum_{j=2, j \neq i}^n |a_{ij}| + |a_{i1}|(\sum_{j=2, j \neq i}^n |\frac{a_{1j}}{a_{11}}|) \\ &\geq \sum_{j=2, j \neq i}^n (|a_{ij}| + |a_{i1}|\frac{a_{1j}}{a_{11}}) \\ &\geq \sum_{j=2, j \neq i}^n |a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j}| \end{aligned}$$

由归纳假设，该矩阵的行列式不为 0，于是原矩阵的行列式也不为 0，故命题对 n 也成立。

进阶习题

习题 1. 计算下述 $n(n \geq 3)$ 阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 + b_2 & \cdots & a_1 + b_n \\ a_2 + b_1 & a_2 + b_2 & \cdots & a_2 + b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n + b_1 & a_n + b_2 & \cdots & a_n + b_n \end{vmatrix}$$

解: 用第一行去减第 $i(2 \leq i \leq n)$ 行, 我们可以得到原式等于

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 + b_2 & \cdots & a_1 + b_n \\ a_2 - a_1 & a_2 - a_1 & \cdots & a_2 - a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n - a_1 & a_n - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \end{vmatrix}$$

由 $n \geq 3$, 至少有两行线性相关, 故上式等于 0。

习题 2. 计算下述 $n(n \geq 2)$ 阶 (“箭头型”) 行列式:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

解: 依次用第 $i(2 \leq i \leq n)$ 列的 b_i 倍去减第一列, 我们可以得到原式等于

$$\begin{vmatrix} a_1 - \sum_{i=2}^n a_i b_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = a_1 - \sum_{i=2}^n a_i b_i$$

习题 3. 计算下述 $n(n \geq 2)$ 阶行列式:

$$\begin{vmatrix} k & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & k & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \cdots & k \end{vmatrix}$$

解: 依次将第 $i(2 \leq i \leq n)$ 列加到第一列, 我们可以得到原式等于

$$\begin{vmatrix} k + (n-1)\lambda & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ k + (n-1)\lambda & k & \lambda & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k + (n-1)\lambda & \lambda & \lambda & \cdots & k \end{vmatrix} \\ = [k + (n-1)\lambda] \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ 1 & k & \lambda & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda & \lambda & \cdots & k \end{vmatrix}$$

再用第一行减下面各行, 我们得到上式等于

$$[k + (n-1)\lambda] \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ 0 & k - \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k - \lambda \end{vmatrix} = [k + (n-1)\lambda](k - \lambda)^{n-1}$$

习题 4. 设 $a_i(1 \leq i \leq n)$ 均非零, 计算下述 n 阶行列式:

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - a_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n - a_n \end{vmatrix}$$

解 (转化成“箭头型”): 用第一行依次去减第 $i(2 \leq i \leq n)$ 行, 得到原式等

于

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ a_1 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix}$$

再按照“箭头型”的计算方法, 依次将第 $i (2 \leq i \leq n)$ 列的 $\frac{a_1}{a_i}$ 倍加到第一列, 得到上式等于

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_1 + \sum_{i=2}^n \frac{a_1}{a_i} x_i & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 0 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1} a_2 \cdots a_n (x_1 - a_1 + \sum_{i=2}^n \frac{a_1}{a_i} x_i)$$

$$= (-1)^n a_1 a_2 \cdots a_n (1 - \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a_i})$$

解 (加边法): 在原矩阵左边和上边再添加一行和一列, 但不改变行列式的值, 我们可以得到原式等于

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1 - a_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1 & x_2 - a_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n - a_n \end{vmatrix}$$

现在用第一行去减第 $i (2 \leq i \leq n)$ 行, 我们可以得到上式等于

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -1 & -a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & -a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix}$$

再依次用第 i 列的 $\frac{1}{a_i}$ 倍去减第一列, 可以得到原式等于

$$\begin{vmatrix} 1 - \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a_i} & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & -a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix} = (-1)^n a_1 a_2 \cdots a_n \left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a_i}\right)$$

习题 5. 计算下述 $n(n \geq 2)$ 阶行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 + a_{11} & x_1^2 + a_{21}x_1 + a_{22} & \cdots & x_1^{n-1} + a_{(n-1)1}x_1^{n-2} + \cdots + a_{(n-1)(n-1)} \\ 1 & x_2 + a_{11} & x_2^2 + a_{21}x_2 + a_{22} & \cdots & x_2^{n-1} + a_{(n-1)1}x_2^{n-2} + \cdots + a_{(n-1)(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n + a_{11} & x_n^2 + a_{21}x_n + a_{22} & \cdots & x_n^{n-1} + a_{(n-1)1}x_n^{n-2} + \cdots + a_{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix}$$

解 (使用 Vandermonde 行列式): 对 $2 \leq i \leq n$, 将第 i 列减去第一列的 a_{ii} 倍, 可以得到原式等于:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 + a_{21}x_1 & \cdots & x_1^{n-1} + a_{(n-1)1}x_1^{n-2} + \cdots + a_{(n-1)(n-2)}x_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 + a_{21}x_2 & \cdots & x_2^{n-1} + a_{(n-1)1}x_2^{n-2} + \cdots + a_{(n-1)(n-2)}x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 + a_{21}x_n & \cdots & x_n^{n-1} + a_{(n-1)1}x_n^{n-2} + \cdots + a_{(n-1)(n-2)}x_n \end{vmatrix}$$

我们将后面每个部分的多项式的常数项消去, 再用第二列做类似的事情, 可以将后面每部分的一次项消去, 以此类推, 我们最终可以得到原式等于:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

即 Vandermonde 行列式, 它等于

$$\prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$