2025年12月22日 星期一 16:49

习题课 12

作业：

2. 设 $A,B,C,D\in M_n(\mathbb{R})$ 且 A 可逆，证明：

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix} = \det(A)\det(D-CA^{-1}B).$$

证明：

$$\begin{pmatrix} E_n & O \\ -CA^{-1} & E_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ O & D-CA^{-1}B\end{pmatrix}$$

两边取行列式得到 $1\cdot\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & B \\ O & D-CA^{-1}B\end{pmatrix}$

$$= \det(A)\det(D-CA^{-1}B)$$

3. 计算

$$\det\begin{pmatrix} 1+a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & 1+a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & 1+a_nb_n\end{pmatrix}$$

解：由 Sylvester 行列式等式

$$\text{原式} = \det\left(E_n + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n\end{pmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n)\right) = \det\left(E_1 + (a_1,a_2,\cdots,a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n\end{pmatrix}\right)$$

$$= 1+\sum_{i=1}^{n} a_ib_i$$

拓展

3.1. 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times m}$，$B\in\mathbb{R}^{m\times n}$. 求证：多项式 $\lambda^m|\lambda E_n - AB| = \lambda^n|\lambda E_m - BA|$

(只是 Sylvester 行列式等式的变形)

3.2. 计算 n 阶行列式

$$\det\begin{pmatrix} a_1^2 & 1+a_1a_2 & \cdots & 1+a_1a_n \\ 1+a_2a_1 & a_2^2 & \cdots & 1+a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+a_na_1 & 1+a_na_2 & \cdots & a_n^2\end{pmatrix}$$

解：原行列式 $= \left| -J_n + \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right|$

解：原行列式 $= \left| -I_n + \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \right|$

$= (-1)^n \left| I_n - \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \right|$

$= (-1)^n \left| I_2 - \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & a_n \end{pmatrix} \right|$

$= (-1)^n \begin{vmatrix} 1-n & -\sum_{i=1}^n a_i \\ -\sum_{i=1}^n a_i & 1-\sum_{i=1}^n a_i^2 \end{vmatrix} = (-1)^n \left[(1-n)(1-\sum_{i=1}^n a_i^2) - (\sum_{i=1}^n a_i)^2 \right]$

4. 设 $A \in M_n(R)$，证明：

$$\operatorname{rank}(A^\vee) = \begin{cases} n, & \operatorname{rank}(A) = n \\ 1, & \operatorname{rank}(A) = n-1 \\ 0, & \operatorname{rank}(A) < n-1 \end{cases}$$

证明：我们有 $A \cdot A^\vee = A^\vee \cdot A = |A| \cdot E_n$

① 若 $\operatorname{rank}(A) = n$，则 A 可逆，$A^\vee = |A| \cdot E_n \cdot A^{-1}$ 可逆 $\Longrightarrow \operatorname{rank}(A^\vee) = n$

② 若 $\operatorname{rank}(A) = n-1$，则 A 存在 $n-1$ 阶子式，该子式作为 $n-1$ 阶方阵满秩，故 $A^\vee \neq 0$。

另一方面 $A \cdot A^\vee = 0 \Longrightarrow \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(A^\vee) \leq \operatorname{rank}(A \cdot A^\vee) + n$

$\operatorname{rank}(A^\vee) \leq 1$，故 $\operatorname{rank} A^\vee = 1$

③ 若 $\operatorname{rank}(A) < n-1$，则 A 的每个 $n-1$ 阶子式均不可逆，故 $A^\vee = 0$。

5. 设 $A, B \in M_n(R)$。

(i) 证明：若 A, B 可逆，则 $(AB)^\vee = B^\vee \cdot A^\vee$。

(ii) 证明：存在 x 足够大，使得 $xE + A$ 和 $xE + B$ 同时可逆。

(iii) 证明：$(AB)^\vee = B^\vee \cdot A^\vee$ 对 $\forall A, B \in M_n(R)$ 成立。

证明：

(i) 若 A, B 可逆，则 AB 可逆，$(AB)^\vee = |AB| \cdot (AB)^{-1} = |B| \cdot B^{-1} \cdot |A| \cdot A^{-1}$

$= B^\vee \cdot A^\vee$

(ii) 考虑 $f(x) = |xE + A|$ 为关于 x 的 n 次多项式，在 R 中至多只有 n 个根。

记为 $\{x_1, x_2, \cdots, x_s\}$，$s \leq n$

同理设 $|xE + B|$ 在 R 中全部根为 $\{y_1, y_2, \cdots, y_t\}$ $t \leq n$

同理设 $|xE+B|$ 在 R 中全部根为 $\{y_1, y_2, \cdots, y_t\}$ $t\le n$

则当 $x > \max\{x_1,\cdots x_s, y_1,\cdots, y_t\}$ 时 $|xE+A||xE+B|\ne 0$

故同时可逆

(iii) 由 (ii) $\exists m\in R$，当 $x>m$ 时 $xE+A, xE+B$ 同时成立.

由 (i) $[(xE+A)(xE+B)]^\vee = (xE+B)^\vee (xE+A)^\vee \quad (x>m)$

等式两边矩阵的每个分量均为 x 的多项式

注意到 $f(x)=g(x) \ (x>m) \Longleftrightarrow f(x)\equiv g(x) \ (\forall x\in R)$

取 $x=0$ 有 $(AB)^\vee = B^\vee \cdot A^\vee$.

拓展：摄动法

5.1. 设 $A, B, C, D \in M_n(R)$，且 $AC=CA$，求证：

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD-CB|$$

证明：若 $\operatorname{rank} A = n$，由 Ex 2

$$\det\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det A \cdot \det (D-CA^{-1}B)$$
$$= \det(AD - ACA^{-1}B) = \det(AD-CB)$$

由 Ex 5. $\exists m\in R$，当 $x>m$ 时 xE_n+A 满秩

又 xE_n+A 满足 $(xE_n+A)C = C\cdot(xE_n+A)$. 故

$$\det\begin{pmatrix} xE_n+A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det[(xE_n+A)D-CB] \quad (x>m)$$

左右两边均为关于 x 的多项式，故等式对 $\forall x\in R$ 成立.

令 $x=0 \Longrightarrow \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix} = \det(AD-CB)$

下面是一道关于矩阵相抵标准型应用的题 $\left(A = P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} Q\right)$

例1：设 $A\in M_n(R)$ 满足 $A^2=A$，求证：$\exists$ n阶可逆方阵 P 使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad r = \operatorname{rank} A$$

证明：$\exists$ 可逆矩阵 P_1, Q_1，使得 $A = P_1\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} Q_1$

$$A^2 = A \Longrightarrow P_1\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} Q_1 P_1 \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} Q_1 = P_1 \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} Q_1$$

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} Q_1 P_1 \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix} Q_1P_1 \begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}$$

令 $Q_1P_1 = \begin{pmatrix}T_1&T_2\\T_3&T_4\end{pmatrix}$，则左式 $=\begin{pmatrix}T_1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}$，i.e. $T_1=E_r$

$Q_1 = \begin{pmatrix}E_r&T_2\\T_3&T_4\end{pmatrix}P_1^{-1}$，$A = P_1\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_r&T_2\\T_3&T_4\end{pmatrix}P_1^{-1}$

$= P_1\begin{pmatrix}E_r&T_2\\0&0\end{pmatrix}P_1^{-1}$

又 $\overset{\text{记为}W_1^{-1}}{\begin{pmatrix}E_r&-T_2\\&E_{n-r}\end{pmatrix}^{-1}}\begin{pmatrix}E_r&T_2\\0&0\end{pmatrix}\overset{\text{记为}W_1}{\begin{pmatrix}E_r&-T_2\\0&E_{n-r}\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}$

$P_1^{-1}AP_1 = W_1\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}W_1^{-1}$

$(W_1^{-1}P_1^{-1})AP_1W_1 = \begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}$ 取 $P=P_1W_1$ 即满足题意.

推论：对 n 阶幂等矩阵 A，有 $\operatorname{rank} A = \operatorname{Tr} A$.

陪集与Lagrange定理

以下假设 G 为有限群

陪集：设 H 为 G 的子群，对于 $\forall a\in G$，称集合 $aH=\{ah \mid h\in H\}$ 为 H 的一个左陪集. 同理可以定义右陪集 $Hb=\{hb \mid h\in H\}$.

由定义，我们立即得到：每个左右陪集与 H 元素个数相同.

引理：设 H 为 G 子群，则 H 的任意两个左右陪集或者相等或者无公共元素，群 G 可以表示为若干个不交左(右)陪集之并.

证明：设 $a,b\in G$，aH, bH 为 H 的两个左陪集.

若 $aH\cap bH\neq\varnothing$，即存在 $h_1,h_2\in H$，$ah_1=bh_2$.

$aH = bh_2h_1^{-1}H\subseteq bH$，反之 $bH = ah_1h_2^{-1}H\subseteq aH$.

故 $aH=bH$.

对 G，有 $G=\bigcup\limits_{g\in G} gH = \bigcup\limits_{i=1}^{s} g_iH$ ($g_i\in G$，且当 $i\neq j$ 时，$g_iH\neq g_jH$).

这证明了第二点，右陪集同理可得.

例1：G 为8阶本原单位根生成的循环群 $\langle w\rangle=\{1,w,w^2,\cdots,w^7\}$

令 $H=\{w^4, w^8=e\}$ 为 G 子群，则 $G = H\cup wH\cup w^2H\cup w^3H$.

例1：G为8阶本原单位根生成的

令 $H=\{w^4, w^8=e\}$ 为 G 子群，则 $G = H \cup wH \cup w^2H \cup w^3H$.

由该引理可以立即得到 $\boxed{\text{Lagrange 定理}}$：

设 G 为一有限群，H 为 G 子群，则 $|H| \mid |G|$

证明：设 $|G|=n$，$|H|=t$，由上述引理，有：

$$G=\bigcup_{i=1}^{s} g_iH,\ \text{其中 } g_iH \neq g_jH\ (i\neq j),\ \text{且 } |g_iH|=|H|$$

故 $n=st$.

例2：任意素数阶群 G 必为循环群.

证明：设 $g\in G$，$g\neq e$，设 g 生成的群为 H，

由于 $g\neq e$，故 $H\neq\{e\}$，由 Lagrange 定理以及 G 的阶为素数可知

$H=G$.

例3. 设 $G=\{-1,1\}$ 为2阶乘法循环群，定义 $G\oplus G$ 上的乘法为 $(a,b)(c,d)=(ac,bd)$. 在该乘法下，$G\oplus G$ 为4阶群，但不是循环群.

证明：$G\oplus G=\{(-1,-1),(-1,1),(1,-1),(1,1)\}$，对 $\forall \sigma\in G\oplus G$，

$\sigma^2=(1,1)$ 为 $G\oplus G$ 中单位.

例4. 仿照例3做法，对6阶群，我们有如下构造：

令 $G_2=\{-1,1\}$，$G_3=\{1,w,w^2\}$. 但此时 $G_2\oplus G_3$ 为6阶循环群 $G_2\oplus G_3=\langle(-1,w)\rangle$. 事实上，同构意义下的全部6阶群为 G_6 和 S_3（非交换）.