

第二次习题课

李宸

2025.10.15

第二次作业解答

第 1 题

设映射 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ 。

(i) 求 $\text{im}(f)$ 。

由于 $x^2 \geq 0$, 且对于任意 $y \geq 0$, 存在 $x = \sqrt{y}$ 使得 $f(x) = y$, 因此:

$$\text{im}(f) = [0, +\infty)$$

(ii) 设 $g = f|_{[0,2]}$, 即 $g: [0,2] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ 。

求 $\text{im}(g)$: 当 $x \in [0,2]$ 时, $x^2 \in [0,4]$, 因此:

$$\text{im}(g) = [0,4]$$

证明 g 是单射: 设 $x_1, x_2 \in [0,2]$, 且 $g(x_1) = g(x_2)$, 即 $x_1^2 = x_2^2$ 。也即

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$$

可得 $x_1 - x_2 = 0$ 或 $x_1 + x_2 = 0$, 若 $x_1 - x_2 = 0$, 则 $x_1 = x_2$;

若 $x_1 + x_2 = 0$, 由于 $x_1, x_2 \geq 0$, 我们有 $0 \leq x_1 + x_2 = 0$, 从而 $x_1 = x_2 = 0$, 所以总是有 $x_1 = x_2$ 。故 g 是单射。

第 2 题

设 $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$, $f(n) = n + 1$; $g: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ 定义为:

$$g(n) = \begin{cases} n-1 & \text{若 } n > 1 \\ 1 & \text{若 } n = 1 \end{cases}$$

(i) 证明 f 是单射: 设 $f(n_1) = f(n_2)$, 则 $n_1 + 1 = n_2 + 1$, 故 $n_1 = n_2$, 因此 f 是单射。

证明 g 是满射: 对任意 $m \in \mathbb{Z}^+$, 我们有 $m+1 > 1$, 则 $g(m+1) = m$, 因此 g 是满射。

(ii) 计算 $f \circ g(n)$ 和 $g \circ f(n)$:

$$f \circ g(n) = f(g(n)) = \begin{cases} f(n-1) = n & \text{若 } n > 1 \\ f(1) = 2 & \text{若 } n = 1 \end{cases}$$

$$g \circ f(n) = g(f(n)) = g(n+1) = n \quad (\text{因为 } n+1 > 1)$$

第 3 题

设映射 $f: X \rightarrow Y$, $S, T \subseteq Y$ 。

(i) 证明 $f^{-1}(S \cup T) = f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(S \cup T) &\Leftrightarrow f(x) \in S \cup T \\ &\Leftrightarrow f(x) \in S \text{ 或 } f(x) \in T \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(S) \text{ 或 } x \in f^{-1}(T) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T) \end{aligned}$$

(ii) 证明 $f^{-1}(S \cap T) = f^{-1}(S) \cap f^{-1}(T)$:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(S \cap T) &\Leftrightarrow f(x) \in S \cap T \\ &\Leftrightarrow f(x) \in S \text{ 且 } f(x) \in T \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(S) \text{ 且 } x \in f^{-1}(T) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(S) \cap f^{-1}(T) \end{aligned}$$

第 4 题

设映射 $f: X \rightarrow Y$, $A, B \subseteq X$ 。

(i) 证明 $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$:

$$\begin{aligned}
 y \in f(A \cup B) &\Leftrightarrow \exists x \in A \cup B, f(x) = y \\
 &\Leftrightarrow \exists x \in A, f(x) = y \text{ 或 } \exists x \in B, f(x) = y \\
 &\Leftrightarrow y \in f(A) \text{ 或 } y \in f(B) \\
 &\Leftrightarrow y \in f(A) \cup f(B)
 \end{aligned}$$

(ii) 证明 $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$:

$$\begin{aligned}
 y \in f(A \cap B) &\Rightarrow \exists x \in A \cap B, f(x) = y \\
 &\Rightarrow \exists x \in X, \text{ 满足 } x \in A, x \in B, \text{ 且 } f(x) = y \\
 &\Rightarrow y \in f(A) \text{ 且 } y \in f(B) \\
 &\Rightarrow y \in f(A) \cap f(B)
 \end{aligned}$$

(iii) 若 f 是单射, 则 $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$:

由 (ii) 知 $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$, 现证反向包含:

$$\begin{aligned}
 y \in f(A) \cap f(B) &\Rightarrow y \in f(A) \text{ 且 } y \in f(B) \\
 &\Rightarrow \exists x_1 \in A, f(x_1) = y \text{ 且 } \exists x_2 \in B, f(x_2) = y \\
 &\Rightarrow f(x_1) = f(x_2) = y
 \end{aligned}$$

由于 f 是单射, $x_1 = x_2 \in A \cap B$, 故 $y \in f(A \cap B)$ 。

拓展内容

1. 映射的良定性

定义 1 (映射的良定性). 设 $f: X \rightarrow Y$ 是一个映射。我们称 f 是良定的, 如果它满足:

1. **存在性**: 对于每个 $x \in X$, 都存在 $y \in Y$ 使得 $y = f(x)$
2. **唯一性**: 对于每个 $x \in X$, 如果 $y_1 = f(x)$ 且 $y_2 = f(x)$, 则 $y_1 = y_2$

当通过等价类定义映射时, 良定性尤为重要。我们不加证明地陈述以下事实:

命题 1. 设 $\sim$ 是 X 上的等价关系, $X/\sim$ 是商集。如果定义 $f: X/\sim \rightarrow Y$ 为 $f([x]) = g(x)$, 其中 $g: X \rightarrow Y$ 是某个映射, 则 f 是良定的当且仅当对于任意 $x_1, x_2 \in X$, 如果 $x_1 \sim x_2$, 则 $g(x_1) = g(x_2)$ 。

进阶习题 1 (良定性的验证). 设 $\mathbb{Z}$ 是整数集, 定义关系 $\sim$ 为: $a \sim b$ 当且仅当 $a - b$ 是偶数。考虑映射:

$$f: \mathbb{Z}/\sim \rightarrow \{0, 1\}, \quad f([n]) = n \bmod 2$$

- (a) 验证 f 是良定的
- (b) 证明 f 是双射
- (c) 如果将 f 改为 $f([n]) = n \bmod 3$, 它还是良定的吗? 为什么?

注. 良定性是映射的必备条件, 在未来当我们构造映射时都应注意并验证其是否是良定的, 特别是对等价类上定义的映射。

2. 映射分解定理

定理 1 (映射的标准分解). 任意映射 $f: X \rightarrow Y$ 都可以唯一地 (在同构意义下) 分解为:

$$f = i \circ \bar{f} \circ p$$

其中:

- $p: X \rightarrow X/\sim$ 是商映射 (自然投影), 将每个元素映到其等价类, 这里等价关系定义为 $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$
- $\bar{f}: X/\sim \rightarrow \text{im}(f)$ 是双射, 定义为 $\bar{f}([x]) = f(x)$
- $i: \text{im}(f) \rightarrow Y$ 是包含映射, 即 $i(y) = y$ 对于所有 $y \in \text{im}(f)$

并且有 p 是满射, $\bar{f}$ 是双射, i 是单射。

证明. 分解已由上述构造给出, 我们只证明唯一性: 假设有另一个分解 $f = i' \circ \bar{f}' \circ p'$, 其中:

- $p': X \rightarrow X'$ 是满射
- $\bar{f}': X' \rightarrow \text{im}(f)$ 是双射

- $i' : \text{im}(f) \rightarrow Y$ 是单射

我们需要证明存在双射 $\varphi : X/\sim \rightarrow X'$ 使得下图交换：

$$\begin{array}{ccc}
 X & & \\
 \downarrow p & \searrow p' & \\
 X/\sim & \xrightarrow{\varphi} & X' \\
 \downarrow \bar{f} & \nearrow \bar{f}' & \\
 \text{im}(f) & \xrightarrow[i']{i} & Y
 \end{array}$$

定义 $\varphi : X/\sim \rightarrow X'$ 为 $\varphi([x]) = p'(x)$ 。我们需要验证 φ 是良定的：如果 $[x] = [y]$ ，则 $x \sim y$ ，所以 $f(x) = f(y)$ 。由分解 $f = i' \circ \bar{f}' \circ p'$ 可得：

$$i'(\bar{f}'(p'(x))) = f(x) = f(y) = i'(\bar{f}'(p'(y)))$$

由于 i' 是单射， $\bar{f}'(p'(x)) = \bar{f}'(p'(y))$ ，又因为 $\bar{f}'$ 是单射，所以 $p'(x) = p'(y)$ 。因此 φ 是良定的。

现在验证 φ 是双射：

单射性： 如果 $\varphi([x]) = \varphi([y])$ ，则 $p'(x) = p'(y)$ ，所以 $\bar{f}'(p'(x)) = \bar{f}'(p'(y))$ ，即 $f(x) = f(y)$ ，所以 $x \sim y$ ，即 $[x] = [y]$ 。

满射性： 对于任意 $x' \in X'$ ，由于 p' 是满射，存在 $x \in X$ 使得 $p'(x) = x'$ ，那么 $\varphi([x]) = p'(x) = x'$ 。

最后验证交换性：

- $p' = \varphi \circ p$ ：对于任意 $x \in X$ ， $(\varphi \circ p)(x) = \varphi([x]) = p'(x)$
- $\bar{f} = \bar{f}' \circ \varphi$ ：对于任意 $[x] \in X/\sim$ ， $(\bar{f}' \circ \varphi)([x]) = \bar{f}'(p'(x)) = f(x) = \bar{f}([x])$
- $i = i'$ ：由于两者都是 $\text{im}(f)$ 到 Y 的包含映射，它们相等

因此分解在同构意义下是唯一的。 $\square$

定理 2 (满射-单射分解). 任意映射 $f : X \rightarrow Y$ 都可以分解为 $f = i \circ s$ ，其中：

- $s : X \rightarrow \text{im}(f)$ 是满射, 定义为 $s(x) = f(x)$
- $i : \text{im}(f) \rightarrow Y$ 是单射, 定义为 $i(y) = y$

这是上述标准分解的特例。

进阶习题 2 (映射分解的应用). 设 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 定义为 $f(x) = x^2$ 。

- 写出 f 的标准分解 $f = i \circ \bar{f} \circ p$
- 明确描述分解中的每个映射: $p, \bar{f}, i$
- 验证 $\bar{f}$ 是双射
- 写出 f 的满射-单射分解

进阶习题 3 (复合映射的分解). 设 $f : X \rightarrow Y$ 和 $g : Y \rightarrow Z$ 是映射:

- 如果 $g \circ f$ 是单射, 证明 f 是单射
- 如果 $g \circ f$ 是满射, 证明 g 是满射
- 举例说明 $g \circ f$ 是单射时 g 不一定是单射
- 举例说明 $g \circ f$ 是满射时 f 不一定是满射
- 若 g 是单射, f 是满射, 由 f, g 的标准分解写出 $g \circ f$ 的标准分解。

证明. (a) 若 $x_1, x_2 \in X$ 满足 $f(x_1) = f(x_2)$, 那么 $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, 由 $g \circ f$ 是单射, 我们有 $x_1 = x_2$ 。

(b) 对任意 $z \in Z$, 由 $g \circ f$ 是满射, 我们知道存在 $x \in X$, 使得 $g(f(x)) = z$, 从而存在 $y = f(x) \in Y$, 使得 $g(y) = z$, 故 g 是满射。

(c) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 定义为 $g(x) = x^2$, 而 $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ 定义为 $f(x) = x$ 。

(d) 同上。

(e) 设 $f = i_f \circ \bar{f} \circ p_f$ 和 $g = i_g \circ \bar{g} \circ p_g$ 分别是 f 和 g 的标准分解。则 $g \circ f = i_g \circ \bar{g} \circ p_g \circ i_f \circ \bar{f} \circ p_f$ 。由前面的结论, 我们知道 p_g 是单射, i_f 是满射, 又由标准分解知道 p_g 是满射, i_f 是单射, 从而均是双射, 于是 $h = \bar{g} \circ p_g \circ i_f \circ \bar{f}$ 是双射, $i_g \circ h \circ p_f$ 即为 $g \circ f$ 的标准分解。

□

进阶习题 4 (幂集的映射分解). 设 A 是任意集合, $\mathcal{P}(A)$ 是其幂集 (即 A 的所有子集构成的集合)。考虑特征函数:

$$\chi: \mathcal{P}(A) \rightarrow \{0, 1\}^A, B \mapsto \chi(B), \chi(B)(a) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } a \in B \\ 0 & \text{如果 } a \notin B \end{cases}$$

(a) 证明 χ 是双射

(b) 写出 χ 的标准分解

(c) 设 A 是有限集, 利用这个结果证明 $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

证明. (a) **证明 χ 是双射**

我们需要证明 χ 既是单射又是满射。

单射性: 假设 $\chi(B) = \chi(C)$, 其中 $B, C \subseteq A$ 。那么对于任意 $a \in A$, 有 $\chi(B)(a) = \chi(C)(a)$ 。根据 χ 的定义, 这等价于:

$$a \in B \Leftrightarrow a \in C$$

因此 $B = C$, 所以 χ 是单射。

满射性: 设 $f \in \{0, 1\}^A$ 是任意函数 (即 $f: A \rightarrow \{0, 1\}$)。定义集合 $B = \{a \in A \mid f(a) = 1\}$ 。那么对于任意 $a \in A$, 有:

$$\chi(B)(a) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } a \in B \\ 0 & \text{如果 } a \notin B \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{如果 } f(a) = 1 \\ 0 & \text{如果 } f(a) = 0 \end{cases} = f(a)$$

因此 $\chi(B) = f$, 所以 χ 是满射。

由于 χ 既是单射又是满射, 它是双射。

(b) **写出 χ 的标准分解**

根据映射的标准分解定理, 任意映射 $f: X \rightarrow Y$ 可以分解为:

$$f = i \circ \bar{f} \circ p$$

其中:

- $p: X \rightarrow X/\sim$ 是商映射, 其中等价关系 $\sim$ 定义为 $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$

- $\bar{f}: X/\sim \rightarrow \text{im}(f)$ 是双射, 定义为 $\bar{f}([x]) = f(x)$
- $i: \text{im}(f) \rightarrow Y$ 是包含映射, 即 $i(y) = y$ 对所有 $y \in \text{im}(f)$

对于 $\chi: \mathcal{P}(A) \rightarrow \{0, 1\}^A$, 我们有:

- 等价关系: $B \sim C \Leftrightarrow \chi(B) = \chi(C)$ 。由于 χ 是单射, 这个等价关系是平凡的, 即 $B \sim C$ 当且仅当 $B = C$ 。因此, 商集 $\mathcal{P}(A)/\sim$ 与 $\mathcal{P}(A)$ 可以自然识别。
- 商映射 $p: \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)/\sim$ 实际上是恒等映射的商集版本, 将每个子集 B 映射到其等价类 $[B] = \{B\}$ 。
- 由于 χ 是双射, $\text{im}(\chi) = \{0, 1\}^A$ 。
- 双射 $\bar{\chi}: \mathcal{P}(A)/\sim \rightarrow \{0, 1\}^A$ 定义为 $\bar{\chi}([B]) = \chi(B)$ 。由于 $[B] = \{B\}$, 这实际上就是 χ 本身。
- 包含映射 $i: \{0, 1\}^A \rightarrow \{0, 1\}^A$ 是恒等映射。

因此, χ 的标准分解为:

$$\chi = i \circ \bar{\chi} \circ p$$

其中:

- $p: \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)/\sim$ 是”几乎恒等”的映射
- $\bar{\chi}: \mathcal{P}(A)/\sim \rightarrow \{0, 1\}^A$ 是双射 (实际上是 χ 本身)
- $i: \{0, 1\}^A \rightarrow \{0, 1\}^A$ 是恒等映射

由于 χ 已经是双射, 其标准分解是”平凡”的, 即分解中的每个映射都是双射。

(c) **利用这个结果证明** $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

由于 $\chi: \mathcal{P}(A) \rightarrow \{0, 1\}^A$ 是双射, 我们有:

$$|\mathcal{P}(A)| = |\{0, 1\}^A|$$

而 $\{0, 1\}^A$ 是从 A 到 $\{0, 1\}$ 的所有函数的集合。由 A 是有限集且记 $|A| = n$, 那么:

$$|\{0, 1\}^A| = 2^n$$

因为对于 A 中的每个元素, 函数值可以是 0 或 1, 所以有 2^n 种可能。

因此：

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$$

□

注. 即使 A 是无限集, 这个等式仍然成立, 并且可以作为无限集幂集势的定义。特别地, 对于任意集合 A , 无论有限还是无限, 我们都有：

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$$

进阶习题 5 (商映射的泛性质). 设 $f: X \rightarrow Y$ 是映射, $\sim$ 是 X 上的等价关系。证明以下命题等价：

- (a) 存在映射 $\bar{f}: X/\sim \rightarrow Y$ 使得 $f = \bar{f} \circ \pi$, 其中 $\pi: X \rightarrow X/\sim$ 是自然投影
- (b) 对于任意 $x_1, x_2 \in X$, 如果 $x_1 \sim x_2$, 则 $f(x_1) = f(x_2)$

并且当这些条件满足时, $\bar{f}$ 是唯一确定的。

证明. 我们证明 (a) 和 (b) 等价。

首先假设 (a) 成立, 即存在 $\bar{f}: X/\sim \rightarrow Y$ 使得 $f = \bar{f} \circ \pi$ 。设 $x_1, x_2 \in X$ 且 $x_1 \sim x_2$, 则 $\pi(x_1) = \pi(x_2)$ 。于是 $f(x_1) = \bar{f}(\pi(x_1)) = \bar{f}(\pi(x_2)) = f(x_2)$ 。因此 (b) 成立。

反之, 假设 (b) 成立。我们定义 $\bar{f}: X/\sim \rightarrow Y$ 如下: 对于任意等价类 $[x] \in X/\sim$, 定义 $\bar{f}([x]) = f(x)$ 。由于 (b) 成立, 如果 $[x] = [y]$, 则 $x \sim y$, 所以 $f(x) = f(y)$, 因此 $\bar{f}$ 是良定的。显然, 对于任意 $x \in X$, 有 $\bar{f}(\pi(x)) = \bar{f}([x]) = f(x)$, 所以 $f = \bar{f} \circ \pi$ 。因此 (a) 成立。

现在证明唯一性。假设有两个映射 $\bar{f}_1, \bar{f}_2: X/\sim \rightarrow Y$ 都满足 $f = \bar{f}_1 \circ \pi = \bar{f}_2 \circ \pi$ 。则对于任意 $[x] \in X/\sim$, 取代表元 $x \in [x]$, 有 $\bar{f}_1([x]) = f(x) = \bar{f}_2([x])$ 。所以 $\bar{f}_1 = \bar{f}_2$ 。因此 $\bar{f}$ 是唯一确定的。

□