

第三次习题课:

作业

$$1. (i) \text{ 证明: 设 } \forall x \in \mathbb{R}, (f+g) \circ h(x) = (f+g)(h(x)) \\ = f(h(x)) + g(h(x)) = f \circ h(x) + g \circ h(x)$$

$$\text{由 } x \text{ 任意性, } (f+g) \circ h = f \circ h + g \circ h$$

$$(ii) \text{ 不一定, 反例: } h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f=g=\text{Id}_{\mathbb{R}} \\ x \mapsto x^2$$

常见错误: ① $(f+g) \circ h = (f+g)(h(x))$, 认为映射和元素相同?

② 第(ii)问没有举反例, 尽管思路正确

③ 第(iii)问举的反例不是良定义的, 例如取 $h(x) = \ln(x)$

其中第①个问题普遍出现。④ 设 $\forall y \in \mathbb{R}, y = h(x) \dots$ (默认 h 满)

2. (i) 两种方法: 严格遵循可逆定义, 或利用逆映射的性质

$$\text{按照定义: 令 } \varphi = g^{-1} \circ f^{-1} \circ g, \text{ 则 } h \circ \varphi = g^{-1} \circ f \circ g \circ (g^{-1} \circ f^{-1} \circ g) \\ = g^{-1} \circ f \circ (g \circ g^{-1}) \circ f^{-1} \circ g \\ = g^{-1} \circ f \circ f^{-1} \circ g \\ = g^{-1} \circ g = \text{Id}_X$$

$$\text{同理 } \varphi \circ h = \text{Id}_X, \text{ 故 } h \text{ 可逆, } h^{-1} = \varphi = g^{-1} \circ f^{-1} \circ g$$

用性质: f 可逆, g 可逆, 可逆映射复合仍可逆, 故 $h = g^{-1} \circ f \circ g$ 可逆,

$$h^{-1} = (g^{-1} \circ f \circ g)^{-1} = (f \circ g)^{-1} \circ g = g^{-1} \circ f^{-1} \circ g$$

常见错误: ① $h \circ (g^{-1} \circ f^{-1} \circ g) = \text{Id}_X$, 故 h 可逆且 $h^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1} \circ g$

② 认为映射复合可交换

举例子: $h: A \rightarrow B, f_1: B \rightarrow A, h \circ f_1 = h \circ f_2$ 但 $f_1 \neq f_2$

$$f_2: B \rightarrow A$$

$$h: [-1, 1] \rightarrow [0, 1] \quad f_1: [0, 1] \rightarrow [-1, 1] \\ \text{且 } \mapsto \sqrt{x}$$

$$h: [-1, 1] \rightarrow [0, 1] \quad x \rightarrow x^2 \quad \begin{array}{l} f_1: [0, 1] \rightarrow [-1, 1] \\ y \rightarrow \sqrt{y} \\ f_2: [0, 1] \rightarrow [-1, 1] \\ y \rightarrow -\sqrt{y} \end{array}$$

等价类与良定义

良定义: $f: A \rightarrow B$ 作为 $A \rightarrow B$ 上的映射, f 满足

① $\forall x \in A, f(x) \in B$

② 若 $x_1, x_2 \in A, x_1 = x_2$, 则 $f(x_1) = f(x_2)$

例 1. $h_1: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \ (n > 1), h_2: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \ (n > 1)$
 $\bar{a} \rightarrow a \quad \bar{a} \rightarrow \bar{a}^2$

h_1 不是良定义, h_2 是良定义的

例 2, 设 V, W 为 $\mathbb{R}$ 上的向量空间, $T: V \rightarrow W$ 为线性映射.

$\ker T = \{ \alpha \mid \alpha \in V, T(\alpha) = 0 \}$

1) 称 $a \sim_T b$, 若 $a - b \in \ker T$, 证明 $\sim_T$ 为等价关系

2) $T^*: V/\ker T \rightarrow W$, 证明 T^* 良定义

3) 证明 T^* 线性映射

4) 证明 T 是 一一映射

例 3. $\varphi: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}^2$
 $\frac{b}{a} \rightarrow (a, b) \quad a \neq 0, \quad \mathbb{Z}^* = \{ (a, b) \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2, b \neq 0 \}$

1) φ 不是良定义的

2) 称 q_1 与 q_2 等价, 若 $q_1 = (a_1, b_1), q_2 = (a_2, b_2), b_1, b_2 \neq 0$

则 $a_1 b_2 = a_2 b_1$, 记作 $q_1 \sim q_2$

验证 $\sim$ 为 $\mathbb{Z}^*$ 上的等价类

3) 由 $\sim$ 诱导的映射 $\varphi^*: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}^*/\sim$

3) 由 $\sim$ 诱导的映射 $\varphi^*: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{Z}/\sim$
 $\frac{a}{b} \rightarrow (a, b)$
 $b \neq 0$

为一一映射(良定义).

置换

- 1 a) 在 S_n 中有多少个置换满足 $\sigma(1)=2$ $(n-1)!$
 b) 在 S_n 中有多少个置换满足 $\sigma(1)=2, \sigma(2) \neq 1$
 $(n-1)! - (n-2)!$

c) 在 S_n 中有多少个错排,

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}) \quad D_1=0, D_2=1$$

2 试证: S_n 中任意置换可通过若干次乘法和取逆作用在
 $\{(12), (123), (124), (125), \dots, (12n)\}$ 上得到 (先证明若 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots \\ i_1 & i_2 & \dots \end{pmatrix}$
 则 $\sigma(12)\sigma^{-1} = (i_1, i_2)$)

3 试证: S_n 中任意置换可通过若干次乘法和取逆作用在 $\{(1234\dots n), (12)\}$ 上得到
 思考题: S_p (p 为素数) 中任意置换可通过若干次乘法和取逆作用在 $\{(1234\dots p), (ij), (i+j)\}$ 上得到