

第六次作业解答

习题 1. 设 $u_1, u_2, u_3, u_4 \in \mathbb{R}^4$, 其中

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

计算 $\langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle$ 的一组基和维数。

解. 将向量作为列构成矩阵 A :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

对 A 进行行化简至行最简形式: 交换第 1 行和第 2 行:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

然后, 第 2 行 = 第 2 行 + 第 1 行, 第 3 行 = 第 3 行 - 2 × 第 1 行:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

第 2 行除以 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

第 3 行 = 第 3 行 - 第 2 行, 第 4 行 = 第 4 行 + 第 2 行:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以行最简形式有两个主元, 位于第 1 列和第 2 列。因此, $\langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle$ 的一组基为 $\{u_1, u_2\}$, 维数为 2。□

习题 2. 设 $v_1, v_2, w_1, w_2 \in \mathbb{R}^3$, 其中

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

再设 $V = \langle v_1, v_2 \rangle$ 和 $W = \langle w_1, w_2 \rangle$ 。计算 $\dim(V + W)$ 和 $\dim(V \cap W)$ 。

解. 首先, V 由 v_1, v_2 张成, 由于 v_1 和 v_2 线性无关, 故 $\dim V = 2$ 。类似地, W 由 w_1, w_2 张成, 由于 w_1 和 w_2 线性无关, 故 $\dim W = 2$ 。

考虑 $V + W$, 它由 v_1, v_2, w_1, w_2 张成。构造矩阵以这些向量为列:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

对 B 进行行化简: 第 3 行 = 第 3 行 - 第 1 行:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

第 3 行 = 第 3 行 - 第 2 行:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

秩为 3, 故 $\dim(V + W) = 3$ 。

由维数公式：

$$\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$$

代入：

$$3 = 2 + 2 - \dim(V \cap W) \implies \dim(V \cap W) = 1.$$

所以, $\dim(V + W) = 3$, $\dim(V \cap W) = 1$. $\square$

习题 3 (关于子空间的模律). 设 U, V, W 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 证明: 如果 $V \subset U$, 则

$$U \cap (V + W) = U \cap V + U \cap W = V + U \cap W.$$

证明. 由于 $V \subset U$, 有 $U \cap V = V$. 因此只需证明 $U \cap (V + W) = V + U \cap W$.

先证 $U \cap (V + W) \subset V + U \cap W$. 任取 $x \in U \cap (V + W)$, 则 $x \in U$ 且 $x \in V + W$, 故存在 $v \in V, w \in W$ 使得 $x = v + w$. 由于 $x \in U$ 且 $v \in V \subset U$, 所以 $w = x - v \in U$. 又 $w \in W$, 故 $w \in U \cap W$. 因此 $x = v + w \in V + U \cap W$. 所以 $U \cap (V + W) \subset V + U \cap W$.

再证 $V + U \cap W \subset U \cap (V + W)$. 任取 $x \in V + U \cap W$, 则存在 $v \in V, w \in U \cap W$ 使得 $x = v + w$. 由于 $v \in V \subset U, w \in U$, 故 $x \in U$. 又 $v \in V, w \in W$, 故 $x \in V + W$. 所以 $x \in U \cap (V + W)$. 因此 $V + U \cap W \subset U \cap (V + W)$.

综上, $U \cap (V + W) = V + U \cap W$. 又 $U \cap V + U \cap W = V + U \cap W$, 故等式成立. $\square$

习题 4. 设 U, V 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 证明: 如果 $\dim(U) + \dim(V) > n$, 则 $U \cap V \neq \{0\}$.

证明. 由维数公式：

$$\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$$

由于 $U + V \subset \mathbb{R}^n$, 有 $\dim(U + V) \leq n$. 所以

$$\dim U + \dim V - \dim(U \cap V) \leq n$$

即

$$\dim(U \cap V) \geq \dim U + \dim V - n$$

由条件 $\dim U + \dim V > n$, 故 $\dim(U \cap V) > 0$, 所以 $U \cap V$ 包含非零向量, 即 $U \cap V \neq \{0\}$. $\square$

习题 5. 设 A 是 $m \times n$ 的实矩阵, B 由 A 通过一次初等行变换得到的矩阵。证明: A 的列向量线性相关当且仅当 B 的列向量线性相关。

证明. 考虑齐次线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 和 $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 。由于初等行变换不改变方程组的解集, 所以 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 和 $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 同解。

A 的列向量线性相关当且仅当存在非零向量 $\mathbf{x}$ 使得 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 同理 B 的列向量线性相关当且仅当存在非零向量 $\mathbf{x}$ 使得 $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 。由于两个方程组同解, 所以 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 有非零解当且仅当 $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 有非零解, 因此 A 的列线性相关当且仅当 B 的列线性相关。 $\square$

1 子空间的直和、和与交

定义 1 (直和). 设 V_1, V_2 是 V 的子空间。如果 $V_1 + V_2$ 中每个向量 α 的分解式

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \quad (\alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2)$$

是唯一的, 则称 $V_1 + V_2$ 为直和, 记作 $V_1 \oplus V_2$ 。

定理 1 (直和的等价条件). 以下条件等价:

- (1) $V_1 + V_2$ 是直和
- (2) $V_1 \cap V_2 = \{0\}$
- (3) $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$
- (4) 零向量的分解式唯一
- (5) V_1 中的一组基和 V_2 中的一组基合起来构成全空间 V 的一组基

证明. 我们证明这些条件的等价性:

(1) $\Rightarrow$ (2): 假设 $V_1 + V_2$ 是直和。任取 $\alpha \in V_1 \cap V_2$, 则 α 可以表示为

$$\alpha = \alpha + 0, \quad \alpha \in V_1, 0 \in V_2$$

同时也可以表示为

$$\alpha = 0 + \alpha, \quad 0 \in V_1, \alpha \in V_2$$

由于直和中向量的分解是唯一的, 所以必须有 $\alpha = 0$ 。因此 $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ 。

(2) $\Rightarrow$ (1): 假设 $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ 。设 $\alpha \in V_1 + V_2$ 有两个分解:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2, \quad \alpha_1, \beta_1 \in V_1, \alpha_2, \beta_2 \in V_2$$

则

$$\alpha_1 - \beta_1 = \beta_2 - \alpha_2$$

左边属于 V_1 , 右边属于 V_2 , 所以 $\alpha_1 - \beta_1 = \beta_2 - \alpha_2 \in V_1 \cap V_2 = \{0\}$ 。因此 $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$, 分解唯一。

(2) $\Leftrightarrow$ (3): 由维数公式:

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$$

所以 $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$ 当且仅当 $\dim(V_1 \cap V_2) = 0$, 即 $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ 。

(1) $\Leftrightarrow$ (4): 显然 (1) $\Rightarrow$ (4)。反之, 如果零向量的分解唯一, 即从

$$0 = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2$$

可推出 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ 。现在设 $\alpha \in V_1 + V_2$ 有两个分解:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2$$

则

$$0 = (\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2)$$

由零向量分解的唯一性, $\alpha_1 - \beta_1 = 0$, $\alpha_2 - \beta_2 = 0$, 所以分解唯一。

(2) $\Rightarrow$ (5): 假设 $V = V_1 \oplus V_2$ 。取 V_1 的一组基 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 和 V_2 的一组基 $\beta_1, \dots, \beta_n$ 。考虑向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n$ 。

首先证明这个向量组生成 V 。任取 $\gamma \in V$, 由于 $V = V_1 \oplus V_2$, 存在唯一的 $\alpha \in V_1$, $\beta \in V_2$ 使得 $\gamma = \alpha + \beta$ 。又 α 可由 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性表示, β 可由 $\beta_1, \dots, \beta_n$ 线性表示, 所以 γ 可由 $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n$ 线性表示。

再证明这个向量组线性无关。设

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_m\alpha_m + l_1\beta_1 + \dots + l_n\beta_n = 0$$

令

$$\alpha = k_1\alpha_1 + \dots + k_m\alpha_m \in V_1, \quad \beta = l_1\beta_1 + \dots + l_n\beta_n \in V_2$$

则 $\alpha + \beta = 0$, 所以 $\alpha = -\beta \in V_1 \cap V_2 = \{0\}$ 。故 $\alpha = 0$, $\beta = 0$ 。由于 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 是 V_1 的基, $\beta_1, \dots, \beta_n$ 是 V_2 的基, 所以 $k_1 = \dots = k_m = 0$, $l_1 = \dots = l_n = 0$ 。

因此 $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n$ 是 V 的一组基。

(5) $\Rightarrow$ (3): 假设 V_1 的基 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 和 V_2 的基 $\beta_1, \dots, \beta_n$ 合起来是 V 的一组基。则 $\dim V = m + n = \dim V_1 + \dim V_2$ 。

□

2 例题

例子 1. 在 $\mathbb{R}^3$ 中, 设

$$V_1 = \{(x, y, z) \mid x + 2y - z = 0\}, \quad V_2 = \{(x, y, z) \mid 2x - y + 3z = 0\}$$

求 $V_1 \cap V_2$ 的维数和一组基。

解. $V_1 \cap V_2$ 中的向量满足方程组:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

解这个齐次线性方程组:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

所以通解为:

$$\begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

即 $V_1 \cap V_2 = \{(-t, t, t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(-1, 1, 1)\}$ 。维数为 1, 一组基为 $\{(-1, 1, 1)\}$ 。

□

例子 2. 在 $\mathbb{R}^4$ 中, 设

$$V_1 = \text{span}\{(1, 2, 0, 1), (0, 1, 1, 0)\}, \quad V_2 = \text{span}\{(1, 0, 1, 1), (2, 1, 1, 2)\}$$

求 $V_1 \cap V_2$ 的维数和一组基。

解. 设 $\alpha \in V_1 \cap V_2$, 则 α 可同时由 V_1 和 V_2 的基线性表示:

$$\alpha = x_1(1, 2, 0, 1) + x_2(0, 1, 1, 0) = y_1(1, 0, 1, 1) + y_2(2, 1, 1, 2)$$

其中 $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ 。

将等式两边展开并整理得:

$$(x_1, 2x_1 + x_2, x_2, x_1) = (y_1 + 2y_2, y_2, y_1 + y_2, y_1 + 2y_2)$$

比较各分量得线性方程组:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + 2y_2 \\ 2x_1 + x_2 = y_2 \\ x_2 = y_1 + y_2 \\ x_1 = y_1 + 2y_2 \end{cases}$$

注意到第一个和第四个方程相同, 所以实际上是三个独立方程。整理得:

$$\begin{cases} x_1 - y_1 - 2y_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - y_2 = 0 \\ x_2 - y_1 - y_2 = 0 \end{cases}$$

将 x_1, x_2, y_1, y_2 视为未知数, 写出系数矩阵并化为行最简形:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

回代得:

$$\begin{cases} y_1 = -\frac{4}{3}y_2 \\ x_2 = y_1 + y_2 = -\frac{1}{3}y_2 \\ x_1 = y_1 + 2y_2 = \frac{2}{3}y_2 \end{cases}$$

令 $y_2 = 3t$ ($t \in \mathbb{R}$), 则:

$$\begin{cases} x_1 = 2t \\ x_2 = -t \\ y_1 = -4t \\ y_2 = 3t \end{cases}$$

代入 α 的表达式：

$$\alpha = x_1(1, 2, 0, 1) + x_2(0, 1, 1, 0) = 2t(1, 2, 0, 1) - t(0, 1, 1, 0) = (2t, 3t, -t, 2t)$$

所以 $V_1 \cap V_2 = \text{span}\{(2, 3, -1, 2)\}$ ，维数为 1。

□

例子 3. 在 $\mathbb{R}^4$ 中，设

$$V_1 = \text{span}\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}$$

$$V_2 = \text{span}\{(2, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 0, -1, 0)\}$$

求 $V_1 \cap V_2$ 的维数和一组基。

解. 设 $\alpha \in V_1 \cap V_2$ ，则 α 可同时由 V_1 和 V_2 的基线性表示：

$$\alpha = x_1(1, 0, 0, 0) + x_2(0, 1, 0, 0) + x_3(0, 0, 1, 1) = y_1(2, 1, 0, 0) + y_2(0, 1, 0, 1) + y_3(1, 0, -1, 0)$$

其中 $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$ 。

将等式两边展开并整理得：

$$(x_1, x_2, x_3, x_3) = (2y_1 + y_3, y_1 + y_2, -y_3, y_2)$$

比较各分量得线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 + y_3 \\ x_2 = y_1 + y_2 \\ x_3 = -y_3 \\ x_3 = y_2 \end{cases}$$

整理得：

$$\begin{cases} x_1 - 2y_1 - y_3 = 0 \\ x_2 - y_1 - y_2 = 0 \\ x_3 + y_3 = 0 \\ x_3 - y_2 = 0 \end{cases}$$

将 $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ 视为未知数, 写出系数矩阵并化为行最简形:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\ & \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

得到简化后的方程组:

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 + y_3 \\ x_2 = y_1 - y_3 \\ x_3 = -y_3 \\ y_2 = -y_3 \end{cases}$$

令 $y_1 = s, y_3 = t$ ($s, t \in \mathbb{R}$), 则:

$$\begin{cases} x_1 = 2s + t \\ x_2 = s - t \\ x_3 = -t \\ y_1 = s \\ y_2 = -t \\ y_3 = t \end{cases}$$

代入 α 的表达式 (使用 V_1 的基表示):

$$\alpha = (2s+t)(1, 0, 0, 0) + (s-t)(0, 1, 0, 0) + (-t)(0, 0, 1, 1) = (2s+t, s-t, -t, -t)$$

我们可以重写为:

$$\alpha = s(2, 1, 0, 0) + t(1, -1, -1, -1)$$

所以 $V_1 \cap V_2 = \text{span}\{(2, 1, 0, 0), (1, -1, -1, -1)\}$, 维数为 2。

□

例子 4. 设 $V = \mathbb{R}^3$, $V_1 = \{(x, y, z) \mid x = y\}$, $V_2 = \{(x, y, z) \mid y = z\}$. 证明: $V = V_1 + V_2$, 并判断这是否为直和。

证明. 首先证明 $V = V_1 + V_2$. 任意 $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, 可以分解为:

$$(x, y, z) = (x, x, z) + (0, y - x, 0)$$

其中 $(x, x, z) \in V_1$, $(0, y - x, 0) = (y, y, 0) - (0, x, x) \in V_1 + V_2$. 所以 $V = V_1 + V_2$.

判断是否为直和: 求 $V_1 \cap V_2$. 设 $(x, y, z) \in V_1 \cap V_2$, 则

$$\begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases} \Rightarrow x = y = z$$

所以 $V_1 \cap V_2 = \{(t, t, t) \mid t \in \mathbb{R}\} \neq \{0\}$. 因此 $V_1 + V_2$ 不是直和. $\square$

例子 5. 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, V_1, V_2, V_3 是 V 的子空间. 证明: 如果 $V_1 \cap (V_2 + V_3) = \{0\}$ 且 $V_2 \cap V_3 = \{0\}$, 则 $V_1 + V_2 + V_3 = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ (若 $\alpha \in V_1 + V_2 + V_3$ 有唯一分解 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, 其中 $\alpha_i \in V_i (i = 1, 2, 3)$).

证明. 设

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \quad \alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2, \alpha_3 \in V_3$$

则 $\alpha_1 = -(\alpha_2 + \alpha_3) \in V_1 \cap (V_2 + V_3) = \{0\}$, 所以 $\alpha_1 = 0$. 于是 $\alpha_2 + \alpha_3 = 0$, 由 $V_2 \cap V_3 = \{0\}$ 得 $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$. 所以零向量的表示唯一, 从而是直和. $\square$

例子 6. 设 $V = \mathbb{R}^3$, $V_1 = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$, $V_2 = \{(x, y, z) \mid x = y = z\}$, $V_3 = \{(x, y, z) \mid x = 0\}$. 判断 $V_1 + V_2 + V_3$ 是否为直和。

解. $V_1 = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$ (平面), $\dim V_1 = 2$. $V_2 = \{(t, t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ (直线), $\dim V_2 = 1$. $V_3 = \{(0, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$ (平面), $\dim V_3 = 2$.

若 $V_1 + V_2 + V_3$ 是直和, 则例 5 可以反过来得到 $V_1 \cap (V_2 + V_3) = \{0\}$ 且 $V_2 \cap V_3 = \{0\}$, 由维数公式:

$$\begin{aligned} \dim(V_1 + V_2 + V_3) &= \dim(V_3 + V_2) + \dim V_1 - \dim(V_1 \cap (V_2 + V_3)) \\ &= \dim V_2 + \dim V_3 + \dim V_1 - \dim(V_1 \cap (V_2 + V_3)) \\ &\quad - \dim(V_2 \cap V_3) \\ &= \dim V_1 + \dim V_2 + \dim V_3 = 2 + 1 + 2 = 5 > 3 \end{aligned}$$

但 $\dim(V_1 + V_2 + V_3) \leq \dim \mathbb{R}^3 = 3$, 矛盾. 所以不能是直和 (直和要求维数之和等于和空间的维数). $\square$