

第七次习题课

矩阵的秩：与线性变换空间维数的对应，秩的不等式

线性变换：像空间、核空间、维数公式

$$1. \text{ 已知 } A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 7 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

求 $\text{rank}(AB^T)$, $\text{rank}(A+A^T)$.

$$\text{解: 计算得 } AB^T = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 14 & 12 & 11 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 8 & 5 \\ 0 & -10 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{rank}(AB^T) = 2$$

$$A+A^T = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & 6 & 0 \\ 7 & 6 & 14 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 288 \end{pmatrix} \quad \text{rank}(A+A^T) = 4$$

2. 设 $V = \mathbb{R}^4$, φ 是 V 上的线性变换, 它在 V 的一组基下的表示矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

求像空间与核空间的基与维数.

解: 设 V 的基为 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

$$\textcircled{1} \varphi(e_1, e_2, e_3, e_4) = (e_1, e_2, e_3, e_4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$\text{rank}(A) = 2$, i.e. $\dim(\text{Im } \varphi) = 2$, 注意到 A 前两列向量线性无关,
故 $\text{Im } \varphi$ 的一组基为 $\varphi(e_1), \varphi(e_2)$

$\textcircled{2}$ 设 $\alpha \in \ker \varphi$, $\alpha = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4$, $\varphi(\alpha) = 0$

i.e. $0 = \varphi(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4) = x_1 \varphi(e_1) + x_2 \varphi(e_2) + x_3 \varphi(e_3) + x_4 \varphi(e_4)$

$$= (e_1, e_2, e_3, e_4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad (e_1, e_2, e_3, e_4 \text{ 是基})$$

$$= (e_1, e_2, e_3, e_4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad (e_1, e_2, e_3, e_4 \text{ 是基})$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dim(\ker \varphi) = 4 - \text{rank } A = 2$$

$$\text{一组基础解系为 } \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 故 } \ker \varphi \text{ 的基为:}$$

$$\begin{aligned} & -4e_1 - 3e_2 + 2e_3, \\ & -e_1 + 2e_2 + e_4. \end{aligned}$$

3. 设 V, U 是两个线性空间, $\varphi: V \rightarrow U$ 为线性映射, 若 $\dim V > \dim U$,
求证: $\ker \varphi \neq 0$

$$\text{证明: 由维数公式 } \dim V = \dim(\text{Im } \varphi) + \dim(\ker \varphi)$$

$$\leq \dim U + \dim(\ker \varphi)$$

$$\dim(\ker \varphi) \geq \dim V - \dim U > 0$$

故 $\ker \varphi \neq 0$

4. $V = M_n(\mathbb{R})$ 为 $\mathbb{R}$ 上全体 n 阶方阵构成的线性空间, 若 $A = (a_{ij}) \in V$,
令 φ 是求迹, 即 $\varphi(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$,

求证: φ 是 V 到 $\mathbb{R}$ 上的线性映射, 再求 $\ker \varphi$ 的一组基与维数.

$$\text{证明: 由维数公式, } \dim(\ker \varphi) = n^2 - \dim(\text{Im } \varphi) = n^2 - 1.$$

$$\text{一组基为 } E_{ij} (i \neq j); E_{11} - E_{22}, E_{22} - E_{33}, \dots, E_{n-1, n-1} - E_{nn}.$$

5. (矩阵秩的 Frobenius 不等式)

设 $A \in F^{m \times n}$, $B \in F^{n \times p}$, $C \in F^{p \times q}$, 求证:

$$\text{rank}(AB) + \text{rank}(BC) - \text{rank}(CB) \leq \text{rank } ABC$$

证明: 设 $U = F^{n \times 1}$, $V = F^{m \times 1}$, 定义线性映射 $\varphi: U \rightarrow V \quad x \mapsto Ax$

记 U_B 为 B 的列向量生成的子空间, 即 $U_B = \{ Bx \mid x \in F^{p \times 1} \}$, $\dim(U_B) = \text{rank } B$

同理定义 U_{BC} , $\dim U_{BC} = \text{rank } BC$, 现在考虑 φ 在 U_B 和 U_{BC} 上的限制.

$$\varphi|_{U_B}: U_B \rightarrow V, \quad \varphi|_{U_{BC}}: U_{BC} \rightarrow V$$

$$x \mapsto Ax, \quad x \mapsto Ax$$

$$\dim(\ker \varphi|_{U_B}) = \text{rank } B - \text{rank}(AB), \quad \dim(\ker \varphi|_{U_{BC}}) = \text{rank}(BC) - \text{rank}(ABC)$$

另一方面, $U_{BC} \subseteq U_B$, 故 $\dim(\ker \varphi|_{U_{BC}}) \leq \dim(\ker \varphi|_{U_B})$

$$\text{i.e. } \text{rank}(BC) - \text{rank}(ABC) \leq \text{rank } B - \text{rank}(AB). \quad \square$$

第一定理, $\text{rank}(ABC) = \text{rank}(B)$ (in $\dim U \leq \dim V$)

i.e. $\text{rank}(BC) - \text{rank}(ABC) \leq \text{rank}(B) - \text{rank}(AB)$. $\square$

* 6. 设 A 为 n 阶方阵, 求证 $\text{rank}(A^n) = \text{rank}(A^{n+1}) = \text{rank}(A^{n+2}) = \dots$

证明: 由秩的不等式:

$$n = r(I_n) \geq r(A) \geq r(A^2) \geq \dots \geq r(A^{n+1}) \geq 0$$

由抽屉原理, 存在 $m \in [0, n]$, $r(A^m) = r(A^{m+1})$.

则对 $\forall k \geq m$, $r(A^{k+1}) = r(A^{k-m} A^m A) = r(A^{k-m} A^m) + r(A^m A) - r(A^m)$
 $= r(A^k)$ C Frobenius 不等式

或者考虑解空间: 试证, 若 $r(A^m) = r(A^{m+1})$, 则 $\dim \ker A^{m+1} = \dim \ker A^{m+2}$.

* 7. 设 φ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 求证: 必存在 $m \in \mathbb{Z}^+$, s.t.
 $\text{Im } \varphi^m = \text{Im } \varphi^{m+1} = \dots$, $\ker \varphi^m = \ker \varphi^{m+1} = \dots$, $V = \text{Im } \varphi^m \oplus \ker \varphi^m$.

证明: 由 6, $\exists m \leq n$, s.t. $\text{Im } \varphi^m = \text{Im } \varphi^{m+1} = \dots$

由维数公式, $\dim \ker \varphi^m = \dim \ker \varphi^{m+1} = \dots$

又 $\ker \varphi^m \subseteq \ker \varphi^{m+1} \subseteq \dots$, 故 $\ker \varphi^m = \ker \varphi^{m+1} = \dots$

若 $\alpha \in \ker \varphi^m \cap \text{Im } \varphi^m$, 设 $\alpha = \varphi^m(\beta)$, $\beta \in V$.

由于 $\alpha \in \ker \varphi^m$, 故 $\varphi^m(\alpha) = \varphi^{2m}(\beta) = 0$, $\beta \in \ker \varphi^{2m} = \ker \varphi^m$

$\Rightarrow \alpha = 0$, i.e. $\text{Im } \varphi^m + \ker \varphi^m = \text{Im } \varphi^m \oplus \ker \varphi^m$

此时 $\dim(\text{Im } \varphi^m + \ker \varphi^m) = \dim(\text{Im } \varphi^m) + \dim(\ker \varphi^m) = n$

故 $V = \text{Im } \varphi^m \oplus \ker \varphi^m$.

简单的推论:

8. 设 φ 是 n 维空间 V 上的线性变换, 若 $r(\varphi) = r(\varphi^2)$, 求证

$$V = \text{Im } \varphi \oplus \ker \varphi$$

证明: 令 7 中 $m=1$ 即可.

9. 设 U, W 是 n 维线性空间 V 的子空间且 $\dim U + \dim W = \dim V$, 求证: 存在 V 上线性变换 φ , s.t. $\ker \varphi = U$, $\text{Im } \varphi = W$.

证明: 取 U 的一组基 $e_1, \dots, e_m$, 扩充为 V 的一组基 $e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n$, 且 $e_{m+1}, \dots, e_n \in W$. 定义 $\varphi: V \rightarrow W$

证明: 取 U 的一组基 $e_1, \dots, e_m$, 扩充为 V 的一组基 $e_1, \dots, e_n$, 再取 W 的一组基 $f_{m+1}, \dots, f_n$, 定义 $\varphi: V \rightarrow W$

$$\varphi(x_1 e_1 + \dots + x_m e_m + x_{m+1} e_{m+1} + \dots + x_n e_n) = x_{m+1} e_{m+1} + \dots + x_n e_n$$

$\ker \varphi = U, \operatorname{Im} \varphi = W$