

第八次作业解答

习题 1. 设 e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 是 $\mathbb{R}^5$ 的标准基, ϵ_1, ϵ_2 是 $\mathbb{R}^2$ 的标准基, 线性映射

$$\phi: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

由 $\phi(e_1) = \epsilon_1 - \epsilon_2$, $\phi(e_2) = \epsilon_2 - \epsilon_1$, $\phi(e_3) = \epsilon_1 - 2\epsilon_2$, $\phi(e_4) = \epsilon_1$ 和 $\phi(e_5) = \epsilon_2$ 确定。

- (i) 计算 ϕ 在 $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5; \epsilon_1, \epsilon_2$ 下的矩阵。
- (ii) 计算 $\text{im}(\phi)$ 的一组基和 $\dim(\ker(\phi))$ 。
- (iii) 设 $x = (1, 1, 1, 1, 1)^t$ 和 $y = 2e_1 - e_5$ 。求 $\phi(x)$ 和 $\phi(y)$ 。

解. (i) 映射 ϕ 在给定基下的矩阵为:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

其中每一列是相应基向量的像在目标基下的坐标表示。

(ii) 首先求 $\text{im}(\phi)$ 的基:

$$\phi(e_1) = \epsilon_1 - \epsilon_2$$

$$\phi(e_2) = -(\epsilon_1 - \epsilon_2)$$

$$\phi(e_3) = \epsilon_1 - 2\epsilon_2$$

$$\phi(e_4) = \epsilon_1$$

$$\phi(e_5) = \epsilon_2$$

观察可知 $\phi(e_4), \phi(e_5)$ 线性无关, 且 $\text{im}(\phi)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的子空间, 于是

$$\dim(\text{im}(\phi)) \leq \dim(\mathbb{R}^2) = 2$$

因此 $\phi(e_4), \phi(e_5)$ 是 $\text{im}(\phi)$ 的一组基。

由秩-零化度定理:

$$\dim(\mathbb{R}^5) = \dim(\ker(\phi)) + \dim(\text{im}(\phi))$$

$$5 = \dim(\ker(\phi)) + 2 \Rightarrow \dim(\ker(\phi)) = 3$$

(iii) 计算 $\phi(x)$ 和 $\phi(y)$:

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \phi(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5) \\ &= (\epsilon_1 - \epsilon_2) + (\epsilon_2 - \epsilon_1) + (\epsilon_1 - 2\epsilon_2) + \epsilon_1 + \epsilon_2 \\ &= 2\epsilon_1 - \epsilon_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(y) &= \phi(2e_1 - e_5) \\ &= 2(\epsilon_1 - \epsilon_2) - \epsilon_2 \\ &= 2\epsilon_1 - 3\epsilon_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

□

习题 2. 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

和

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

计算 $2A - BC$ 。

解. 首先计算 BC :

$$BC = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

然后计算 $2A$:

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

最后计算 $2A - BC$:

$$2A - BC = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

□

习题 3. 设 $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 。计算所有满足 $XJ = JX$ 的二阶方阵 X 。

解. 设 $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 则:

$$XJ = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

$$JX = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

令 $XJ = JX$, 得:

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

比较对应元素:

$$0 = c$$

$$a = d$$

$$c = 0$$

因此, 所有满足条件的矩阵为:

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

□

习题 4. 设线性映射 $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 在标准基 $e_1, e_2; e_1, e_2$ 下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

证明:

$$\ker(\phi) = \operatorname{im}(\phi)$$

请回答 $\mathbb{R}^2$ 和 $\ker(\phi) + \operatorname{im}(\phi)$ 是否相同? 并说明理由。

证. 由矩阵表示可得:

$$\phi(e_1) = 0, \quad \phi(e_2) = e_1$$

因此:

$$\ker(\phi) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \phi(x) = 0\} = \operatorname{span}\{e_1\}$$

$$\operatorname{im}(\phi) = \{\phi(x) \mid x \in \mathbb{R}^2\} = \operatorname{span}\{e_1\}$$

故 $\ker(\phi) = \operatorname{im}(\phi)$ 。

$\mathbb{R}^2$ 和 $\ker(\phi) + \operatorname{im}(\phi)$ 不相同, 因为:

$$\ker(\phi) + \operatorname{im}(\phi) = \operatorname{span}\{e_1\} \neq \mathbb{R}^2$$

实际上, $\ker(\phi) + \operatorname{im}(\phi)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的一维子空间。 □

习题 5. 设 $\phi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是线性满射, V 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间。证明:

$$\dim(\phi^{-1}(V)) \geq \dim(V)$$

证. **第一步: 证明 $\phi^{-1}(V)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间。**

设 $u, w \in \phi^{-1}(V)$, 则 $\phi(u), \phi(w) \in V$ 。由于 V 是子空间, 对任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 有:

$$\alpha\phi(u) + \beta\phi(w) = \phi(\alpha u + \beta w) \in V$$

因此 $\alpha u + \beta w \in \phi^{-1}(V)$, 故 $\phi^{-1}(V)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间。

第二步: 证明维数不等式。

考虑限制映射 $\psi = \phi|_{\phi^{-1}(V)}: \phi^{-1}(V) \rightarrow V$ 。

首先证明 ψ 是满射: 对任意 $v \in V \subset \mathbb{R}^m$, 由于 ϕ 是满射, 存在 $u \in \mathbb{R}^m$ 使得 $\phi(u) = v$ 。但 $v \in V$, 故 $u \in \phi^{-1}(V)$, 即 $\psi(u) = v$ 。

由线性映射的维数公式:

$$\dim(\phi^{-1}(V)) = \dim(\ker(\psi)) + \dim(\operatorname{im}(\psi))$$

由于 ψ 是满射, $\dim(\operatorname{im}(\psi)) = \dim(V)$, 且 $\dim(\ker(\psi)) \geq 0$, 因此:

$$\dim(\phi^{-1}(V)) \geq \dim(V)$$

等号成立当且仅当 $\ker(\psi) = \{0\}$, 即 ψ 是单射。 □

1 进阶练习

习题 1. 设置换 $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 1 & 6 & 5 & 7 & 8 & 4 & 10 & 2 & 9 \end{pmatrix}$ 。

1. 把 ρ 写成互不相交的循环之积。
2. 计算 ρ 的阶。
3. 确定 ρ 的奇偶性。

解. 1. $\rho = (1\ 3\ 6\ 8\ 10\ 9\ 2)(4\ 5\ 7)$ 。

2. 置换的阶等于其循环分解中各循环长度的最小公倍数。

循环 $(1\ 3\ 6\ 8\ 10\ 9\ 2)$ 的长度为 7, 循环 $(4\ 5\ 7)$ 的长度为 3。

$\text{lcm}(7, 3) = 21$, 所以 ρ 的阶为 21。

3. 在我们的分解中: 循环 $(1\ 3\ 6\ 8\ 10\ 9\ 2)$ 长度为 7 (奇数), 而循环 $(4\ 5\ 7)$ 长度为 3 (奇数), 其符号是 $(-1)^{6+2} = 1$, 所以 ρ 是一个偶置换。

□

习题 2. 设 A 为 n 阶矩阵, 其中第 i 行第 $i+1$ 列为 1 ($i = 1, 2, \dots, n-1$), 其余元素为 0, 即

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

对于任意 n 阶矩阵 $B = (b_{ij})$, 分别计算 AB 和 BA , 看看有什么规律?

右乘 BA

设 $C = BA$, 则 C 的元素为

$$c_{ij} = \begin{cases} 0, & j = 1, \\ b_{i,j-1}, & j = 2, 3, \dots, n. \end{cases}$$

即 BA 是将 B 的每一列向右移动一列, 第一列变为零列。

左乘 AB

设 $D = AB$, 则 D 的元素为

$$d_{ij} = \begin{cases} b_{i+1,j}, & i = 1, 2, \dots, n-1, \\ 0, & i = n. \end{cases}$$

即 AB 是将 B 的每一行向下移动一行, 最后一行变为零行。

习题 3. 设 p 是一个整数。对于整数 a, b, c, d , 若满足:

$$ad \equiv bc \pmod{p}$$

则称有序对 (a, b) 与 (c, d) **相似**, 记作 $(a, b) \sim (c, d)$ 。

请回答以下问题:

1. 若 p 为素数, 问相似关系是否是等价关系? 说明理由。
 2. 若 p 为素数, 且限制 b 和 d 都不是 p 的倍数, 问相似关系是否是等价关系? 说明理由。
 3. 若 p 为一般的整数 (不一定是素数), 且限制 b 和 d 都不是 p 的倍数, 问相似关系是否是等价关系? 说明理由。
1. 当 p 为素数时, 相似关系**不是**等价关系。

- **自反性**: 对于任意 (a, b) , 有 $ab \equiv ba \pmod{p}$, 因此 $(a, b) \sim (a, b)$, 自反性成立。
- **对称性**: 若 $(a, b) \sim (c, d)$, 即 $ad \equiv bc \pmod{p}$, 则 $cb \equiv da \pmod{p}$, 因此 $(c, d) \sim (a, b)$, 对称性成立。
- **传递性**: 当包括零对时, 传递性可能不成立。例如, 取 $p = 2$, 考虑:

- $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (0, 1)$
- $A \sim B$ 因为 $0 \times 0 \equiv 1 \times 0 \pmod{2}$ ($0 \equiv 0$)
- $A \sim C$ 因为 $0 \times 1 \equiv 0 \times 0 \pmod{2}$ ($0 \equiv 0$)
- 但 $B \sim C$ 需要 $1 \times 1 \equiv 0 \times 0 \pmod{2}$ ($1 \equiv 0$), 这不成立。

因此, 传递性不成立, 相似关系不是等价关系。

2. 当 p 为素数且 b 和 d 都不是 p 的倍数时, 相似关系是等价关系。

- **自反性**: 对于任意 (a, b) , 有 $ab \equiv ba \pmod{p}$, 因此 $(a, b) \sim (a, b)$, 自反性成立。
- **对称性**: 若 $(a, b) \sim (c, d)$, 即 $ad \equiv bc \pmod{p}$, 则 $cb \equiv da \pmod{p}$, 因此 $(c, d) \sim (a, b)$, 对称性成立。
- **传递性**: 假设:
 - $(a, b) \sim (c, d)$: 即 $ad \equiv bc \pmod{p}$
 - $(c, d) \sim (e, f)$: 即 $cf \equiv de \pmod{p}$

将第一个同余式乘以 f :

$$adf \equiv bcf \pmod{p}$$

将第二个同余式乘以 b :

$$bcf \equiv bde \pmod{p}$$

因此:

$$adf \equiv bde \pmod{p}$$

即:

$$d(af - be) \equiv 0 \pmod{p}$$

由于 d 不是 p 的倍数且 p 是素数, d 与 p 互素, 从而存在整数 u 使得 $ud \equiv 1 \pmod{p}$, 两边同时乘以 u 得:

$$af \equiv be \pmod{p}$$

即 $(a, b) \sim (e, f)$, 传递性成立。

因此, 相似关系是等价关系。

3. 当 p 为一般整数且 b 和 d 都不是 p 的倍数时, 相似关系不是等价关系。

- **自反性和对称性**依然成立, 证明同问题 2。
- **传递性**: 当 p 是合数时, 即使 b 和 d 不是 p 的倍数, d 也可能不可逆, 导致传递性不成立。

例如, 取 $p = 4$, 考虑:

- $A = (2, 2)$, $B = (4, 2)$, $C = (0, 1)$
- $b = 2$, $d = 2$, $f = 1$ 都不是 4 的倍数
- $A \sim B$ 因为 $2 \times 2 = 4 \equiv 0 \pmod{4}$, $2 \times 4 = 8 \equiv 0 \pmod{4}$
- $B \sim C$ 因为 $4 \times 1 = 4 \equiv 0 \pmod{4}$, $2 \times 0 = 0 \equiv 0 \pmod{4}$
- 但 $A \sim C$ 需要 $2 \times 1 = 2 \equiv 0 \pmod{4}$, 而 $2 \not\equiv 0 \pmod{4}$

因此, 传递性不成立, 相似关系不是等价关系。

习题 4. 设 $f_1, f_2, \dots, f_k$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的线性函数 (即从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}$ 的线性映射)。
证明: 如果这些线性函数的核的交集只包含零向量, 即

$$\bigcap_{i=1}^k \ker(f_i) = \{0\},$$

则必有 $k \geq n$ 。

证明. 定义线性映射 $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ 为

$$T(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

那么, 对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$, 有

$$T(x) = 0 \iff f_i(x) = 0 \text{ 对所有 } i = 1, \dots, k \iff x \in \bigcap_{i=1}^k \ker(f_i).$$

由已知条件, $\bigcap_{i=1}^k \ker(f_i) = \{0\}$, 所以 $\ker(T) = \{0\}$ 。因此 T 是单射。于是

$$n = \dim(\mathbb{R}^n) \leq \dim(\mathbb{R}^k) = k,$$

即 $k \geq n$ 。证毕。 □

另解. 由于每个 f_i 是线性映射, 存在 $a_i = (f_i(e_1), \dots, f_i(e_n)) \in \mathbb{R}^n$, 其中 $e_i (1 \leq i \leq n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准基, 使得 $f_i(x) = a_i \cdot x$ 对于所有 $x \in \mathbb{R}^n$ 。考虑齐次线性方程组:

$$\begin{cases} a_1 \cdot x = 0 \\ a_2 \cdot x = 0 \\ \vdots \\ a_k \cdot x = 0 \end{cases}$$

该方程组的解空间就是 $\bigcap_{i=1}^k \ker(f_i)$ 。已知解空间只有零向量，因此方程组的唯一解是 $x = 0$ 。这意味着系数矩阵 A 的行秩为 n ，其中 A 是 $k \times n$ 矩阵，行向量为 $a_1, a_2, \dots, a_k$ 。由于行秩不超过矩阵的行数 k ，我们有

$$n = \text{rank}(A) \leq k,$$

所以 $k \geq n$ 。证毕。 $\square$

习题 5. 设 A 是 $n \times m$ 矩阵， B 是 $k \times n$ 矩阵，将它们视为线性映射：

$$A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$$

$$BA: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$$

1. 证明： $\dim(\ker(BA)) \leq \dim(\ker(A)) + \dim(\ker(B))$

2. 由上述不等式证明： $\text{rank}(BA) \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B) - n$

证明. 1. 设 $x \in \ker(BA)$ ，则 $(BA)x = 0$ ，即 $B(Ax) = 0$ ，所以 $Ax \in \ker(B)$ 。

考虑限制映射：

$$A|_{\ker(BA)}: \ker(BA) \rightarrow \ker(B)$$

由秩-零化度定理：

$$\dim(\ker(BA)) = \dim(\text{im}(A|_{\ker(BA)})) + \dim(\ker(A|_{\ker(BA)}))$$

其中：

- $\text{im}(A|_{\ker(BA)}) \subseteq \ker(B)$ ，故 $\dim(\text{im}(A|_{\ker(BA)})) \leq \dim(\ker(B))$
- $\ker(A|_{\ker(BA)}) = \ker(BA) \cap \ker(A) \subseteq \ker(A)$ ，
故 $\dim(\ker(A|_{\ker(BA)})) \leq \dim(\ker(A))$

因此：

$$\dim(\ker(BA)) \leq \dim(\ker(B)) + \dim(\ker(A))$$

2. 由秩-零化度定理：

$$\dim(\ker(BA)) = m - \text{rank}(BA)$$

$$\dim(\ker(A)) = m - \text{rank}(A)$$

$$\dim(\ker(B)) = n - \text{rank}(B)$$

代入第一问的不等式：

$$m - \text{rank}(BA) \leq (m - \text{rank}(A)) + (n - \text{rank}(B))$$

整理得：

$$\text{rank}(BA) \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B) - n$$

□