第九次作业解答

习题 1. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ 是三阶实矩阵。

(i) 计算 A^2 和 A^3。

(ii) 证明：对任意非负整数 m,

$$A^{2m}=\begin{pmatrix}1&0&0\\m&1&0\\m&0&1\end{pmatrix},\quad A^{2m+1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\m+1&0&1\\m&1&0\end{pmatrix}.$$

解： (i) 计算得

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1+0&0+1&0+0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1+1&0+0&0+1\\1+0&0+1&0+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}.$$

(ii) 用数学归纳法证明。当 $m=0$ 时,

$$A^0=I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad A^1=A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0+1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},$$

公式成立。假设对非负整数 m 公式成立，即

$$A^{2m}=\begin{pmatrix}1&0&0\\m&1&0\\m&0&1\end{pmatrix},\quad A^{2m+1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\m+1&0&1\\m&1&0\end{pmatrix}.$$

则

$$A^{2(m+1)}=A^{2m+2}=A^{2m}\cdot A^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\m&1&0\\m&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\m+1&1&0\\m+1&0&1\end{pmatrix},$$

$$A^{2(m+1)+1}=A^{2m+3}=A^{2m+1}\cdot A^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\m+1&0&1\\m&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\m+2&0&1\\m+1&1&0\end{pmatrix}.$$

即公式对 $m+1$ 也成立。由数学归纳法，对任意非负整数 m 公式成立。

习题 2. 设 $A\in M_n(\mathbb{R})$。证明：

(i) 如果 A 幂零，则 A 不可逆。

(ii) 如果 A 幂等且可逆，则 $A=E$（这里 E 表示单位矩阵）。

(iii) 如果 A 对称且可逆，则 A^{-1} 也对称。

证： (i) 若 A 幂零，则存在正整数 k 使得 $A^k=0$。若 A 可逆，则 A^{-1} 存在，于是

$$E=A^k(A^{-1})^k=0\cdot(A^{-1})^k=0,$$

矛盾。故 A 不可逆。

(ii) 若 A 幂等（即 $A^2=A$）且可逆，则两边左乘（或右乘）A^{-1} 得

$$A^{-1}A^2=A^{-1}A\quad\Rightarrow\quad A=E.$$

(iii) 若 A 对称（即 $A^T=A$）且可逆，则

$$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}=A^{-1},$$

故 A^{-1} 对称。

习题 3. 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times s},B\in\mathbb{R}^{s\times n}$。证明：如果 $AB=O_{m\times n}$，则

$$\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)\le s.$$

证： 考虑线性映射：$B:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^s$，$A:\mathbb{R}^s\to\mathbb{R}^m$。由 $AB=0$ 知 $\operatorname{Im}(B)\subseteq\operatorname{Ker}(A)$。于是

$$\operatorname{rank}(B)=\dim\operatorname{Im}(B)\le\dim\operatorname{Ker}(A).$$

由对偶定理，$\dim\operatorname{Ker}(A)=s-\operatorname{rank}(A)$。因此

$$\operatorname{rank}(B)\le s-\operatorname{rank}(A),$$

即

$$\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)\le s.$$

习题 4. 设 $A \in M_m(\mathbb{R})$, $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 且 $B \in M_n(\mathbb{R})$。证明：如果 A 和 B 都可逆，则

$$\operatorname{rank}(M) = \operatorname{rank}(AM) = \operatorname{rank}(MB).$$

证： 利用矩阵秩的性质：对任意矩阵 P，有

$$\operatorname{rank}(PM) \le \min\{\operatorname{rank}(P), \operatorname{rank}(M)\}$$

所以

$$\operatorname{rank}(AM) \le \operatorname{rank}(M).$$

同时由 A 可逆，$M = A^{-1}AM$ 且

$$\operatorname{rank}(A^{-1}AM) \le \operatorname{rank}(AM).$$

综上，即得

$$\operatorname{rank}(M) = \operatorname{rank}(AM)$$

同理可得

$$\operatorname{rank}(M) = \operatorname{rank}(MB)$$

（注：也可利用提示中的不等式，但此处直接利用矩阵秩的性质更为简洁。）

期中解答

习题 1. 设置换 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 1 & 6 & 2 & 7 & 5 & 8 & 3 & 10 & 9 \end{pmatrix}$。

(i) 把 σ 写成互不相交的循环之积。

(ii) 计算 σ 的阶。

(iii) 确定 σ 的奇偶性。

解：

(i) $\sigma = (1\ 4\ 2)(3\ 6\ 5\ 7\ 8)(9\ 10)$。

(ii) $\operatorname{ord}(\sigma) = \operatorname{lcm}(3, 5, 2) = 30$。

(iii) $(-1)^{2+4+1} = -1 \Rightarrow$ 奇置换。

习题 2. 设 $S = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{Z}\ 且 y \neq 0\}$。对于 $(a,b),(c,d) \in S$，如果 $ad = cb$，则称 $(a,b),(c,d)$ 有关系 $\sim$，记为 $(a,b) \sim (c,d)$。

(i) 证明：$\sim$ 是 S 上的等价关系。

(ii) 设 $(u,v),(x,y) \in \mathbb{Z}^2$，如果 $uy = xv$，则称 $(u,v),(x,y)$ 有关系 $\approx$，记为 $(u,v) \approx (x,y)$。请回答 $\approx$ 是不是 $\mathbb{Z}^2$ 上的等价关系？并说明理由。

解：

(i)
- **自反性：** 对任意 $(x,y) \in S$，有 $xy = yx$，故 $(x,y) \sim (x,y)$。
- **对称性：** 设 $(x,y),(a,b) \in S$ 且 $(x,y) \sim (a,b)$，则 $xb = ay$。故 $ay = xb$，于是 $(a,b) \sim (x,y)$。
- **传递性：** 设 $(x,y),(a,b),(u,v) \in S$，且 $(x,y) \sim (a,b)$，$(a,b) \sim (u,v)$。则 $xb = ay$，$av = ub$。若 $a = 0$，则 $x = u = 0$（因 $b \neq 0$），故 $xv = 0$，$uy = 0$，于是 $(x,y) \sim (u,v)$。若 $a \neq 0$，由假设 $xbav = ayub$，因 $ab \neq 0$，故 $xv = yu$，即 $(x,y) \sim (u,v)$。

因此 $\sim$ 是等价关系。

(ii) $\approx$ 不是 $\mathbb{Z}^2$ 上的等价关系。否则，由 $(1,1) \approx (0,0)$ 和 $(1,2) \approx (0,0)$，根据传递性应有 $(1,1) \approx (1,2)$，即 $2 = 1$，矛盾。

习题 3. 设齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

的系数矩阵为 A，解空间为 V_A。

(i) 计算 $\operatorname{rank}(A)$。

(ii) 计算 V_A 的维数和一组基。

(iii) 设 a,b 是任意实数。请回答以 $(A|\,{}^{a}_{b})$ 为增广矩阵的线性方程组是否都相容？并说明理由。

解：

(i) 系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，

经初等行变换得 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，故 $\operatorname{rank}(A) = 2$。

(ii) $\dim(V_A) = 5 - 2 = 3$。直接计算得 V_A 的一组基为：

$$(0,1,1,-1,0)^{\mathrm{t}}, \quad (0,2,1,-1,1)^{\mathrm{t}}, \quad (-1,0,1,-1,0)^{\mathrm{t}}.$$

(iii) 都相容。理由：设 $B = (A|\,{}^{a}_{b}\,)$，则 $\operatorname{rank}(B) \leq 2$。又 $\operatorname{rank}(A) = 2$，故 $\operatorname{rank}(B) \geq 2$，从而 $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$，方程组相容。

习题 4. 设 e_1, e_2, e_3, e_4 是 $\mathbb{R}^4$ 的标准基，e_1, e_2, e_3 是 $\mathbb{R}^3$ 的标准基，线性映射 $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ 由

$$\phi(e_1) = e_1 - e_3, \quad \phi(e_2) = e_2 - e_3, \quad \phi(e_3) = e_1 + e_2 - 2e_3, \quad \phi(e_4) = e_1 - e_2$$

确定。

(i) 写出 ϕ 在给定基下的矩阵。

(ii) 计算 $\dim(\ker(\phi))$ 和 $\dim(\operatorname{im}(\phi))$。

(iii) 计算 $\phi(u)$，其中 $u = (1,1,1,0)^{\mathrm{t}}$。

解：

(i) 矩阵为

$$A_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) $\operatorname{rank}(A_\phi) = 2$，故 $\dim(\operatorname{im}(\phi)) = 2$，$\dim(\ker(\phi)) = 4 - 2 = 2$。

(iii) $\phi(u) = A_\phi u = (2,2,-4)^{\mathrm{t}}$。

习题 5. 计算所有的 $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ 使得

$$A \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} A.$$

解： 设 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$。记 $J=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，则

$$AJ=\begin{pmatrix}0&a_{11}&a_{12}\\0&a_{21}&a_{22}\\0&a_{31}&a_{32}\end{pmatrix},\quad JA=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

比较得 $a_{21}=a_{31}=a_{32}=0$，$a_{11}=a_{22}=a_{33}$，$a_{12}=a_{23}$。故

$$A=\begin{pmatrix}x&y&z\\0&x&y\\0&0&x\end{pmatrix},\quad x,y,z\in\mathbb{R}.$$

习题 6. 设 a,b,m,n 都是正整数，且 $am=bn$。证明：am 是 m 和 n 的最小公倍数当且仅当 a 和 b 互素。

证明：

($\Rightarrow$) 设 $am=\operatorname{lcm}(m,n)$，令 $g=\gcd(a,b)$，则存在 $x,y\in\mathbb{Z}^+$ 使得 $a=xg$，$b=yg$。代入 $am=bn$ 得 $xgm=ygn$，即 $xm=yn$。故 xm 是 m,n 的公倍数。由 $0<xm\le am$ 及 am 是最小公倍数，得 $x=a$，即 $g=1$，故 a 与 b 互素。

($\Leftarrow$) 设 $\gcd(a,b)=1$，则存在 $u,v\in\mathbb{Z}$ 使得 $ua+vb=1$。令 $l=\operatorname{lcm}(m,n)$，则 $ual+vbl=l$。由 $m\mid l$ 得 $am\mid ual$；同理 $bn\mid vbl$。又 $am=bn$，故 $am\mid vbl$。因此 $am\mid l$。另一方面，am 是 m,n 的公倍数，故 $l\mid am$。从而 $l=am$，即 am 是最小公倍数。

习题 7. 从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}$ 的线性映射称为 $\mathbb{R}^n$ 上的线性函数。设 f 和 g 是 $\mathbb{R}^n$ 上的线性函数。证明：

(i) 如果 $n>2$，则 $\ker(f)\cap\ker(g)\neq\{0\}$；

(ii) 如果 $\ker(f)=\ker(g)$，则存在实数 α 使得对任意 $x\in\mathbb{R}^n$，$f(x)=\alpha g(x)$ 都成立。

证明：

(i) 因为 $\dim(\mathbb{R})=1$，故 $\dim(\mathrm{im}(f))\le 1$，由维数公式得 $\dim(\ker(f))\ge n-1$；同理 $\dim(\ker(g))\ge n-1$。再根据维数公式，

$$\begin{aligned}&\dim(\ker(f)\cap\ker(g))\\=&\dim(\ker(f))+\dim(\ker(g))-\dim(\ker(f)+\ker(g))\\\ge&(n-1)+(n-1)-n=n-2.\end{aligned}$$

当 $n>2$ 时，$\dim(\ker(f)\cap\ker(g))>0$，故 $\ker(f)\cap\ker(g)\neq\{0\}$。

注. 也可利用线性函数在标准基下的矩阵把问题化为 $\ker(f)\cap\ker(g)$ 是由两个齐次线性方程构成的线性方程组的解空间. 因为 $n>2$, 所以该方程组有至少三个未知数, 从而必有非平凡解。

(ii) 令 $V=\ker(f)=\ker(g)$。若 $V=\mathbb{R}^n$，则 $f=g=0$，取 $\alpha=1$ 即可。否则，$\dim(V)=n-1$。取 V 的一组基 $v_1,\ldots,v_{n-1}$，并扩充为 $\mathbb{R}^n$ 的基 $v_1,\ldots,v_{n-1},v_n$。设 $\lambda=f(v_n)$，$\mu=g(v_n)$，则 $\lambda,\mu\neq 0$（否则 $v_n\in V$）。令 $\alpha=\lambda/\mu$，定义 $h=f-\alpha g$，则 $h(v_j)=0$ 对所有 $j=1,\ldots,n$ 成立，故 $h=0$，即 $f=\alpha g$。

注. 也可利用线性函数在标准基下的矩阵把问题化为 $\ker(f)\cap\ker(g)$ 是由两个齐次线性方程构成的线性方程组的解空间. 因为该解空间维数是 $n-1$。所以该方程组对应的矩阵 $A\in\mathbb{R}^{2\times n}$ 的秩是 1 (对偶定理). 由此可知, A 的两行线性相关. 故存在 $\lambda\in\mathbb{R}$ 使得 $f=\lambda g$。

注. 还有一种解法如下：设 $x\in\mathbb{R}^n$，则存在实数 $\alpha\in\mathbb{R}$，使得 $f(x)=\alpha g(x)$，现在考虑任意的 $y\in\mathbb{R}^n$，设 $f(y)=\beta g(y)$，对某个实数 $\beta\in\mathbb{R}$ 成立，那么

$$\begin{aligned}f(\beta g(y)x-\alpha g(x)y)=&\beta g(y)f(x)-\alpha g(x)f(y)\\=&\beta\alpha g(y)g(x)-\alpha\beta g(x)g(y)\\=&0\end{aligned}$$

即 $\beta g(y)x-\alpha g(x)y\in\ker(f)=\ker(g)$，从而

$$0=g(\beta g(y)x-\alpha g(x)y)=\beta g(y)g(x)-\alpha g(x)g(y)=(\beta-\alpha)g(y)g(x)$$

若 $\ker(g)\neq\mathbb{R}^n$，固定 $x\notin\ker(g)$，对所有 $y\notin\ker(g)$，我们有 $\beta=\alpha$，而对所有的 $y\in\ker(g)$，我们也有 $f(y)=\alpha g(y)$。

习题 8. 设 V_1, V_2 和 W 是 $\mathbb{R}^n$ 的三个子空间，且满足 $\mathbb{R}^n = V_1 + V_2$ 以及 $\mathbb{R}^n = (V_1 \cap V_2) + W$。证明：

(i) $V_1 = (V_1 \cap V_2) + (V_1 \cap W)$，

(ii) $\dim(V_1) + \dim(V_2 \cap W) = \dim(V_2) + \dim(V_1 \cap W)$。

证明：

(i) 由 $\mathbb{R}^n = (V_1 \cap V_2) + W$ 及模律（子空间交与和的分配律）得：

$$\begin{aligned} V_1 =& V_1 \cap \mathbb{R}^n \\ =& V_1 \cap \big((V_1 \cap V_2) + W\big) \\ =& (V_1 \cap V_1 \cap V_2) + (V_1 \cap W) \\ =& (V_1 \cap V_2) + (V_1 \cap W) \end{aligned}$$

(ii) 由 (i) 及维数公式，

$$\begin{aligned} \dim(V_1) &= \dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_1 \cap W) - \dim\big((V_1 \cap V_2) \cap (V_1 \cap W)\big) \\ &= \dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_1 \cap W) - \dim(V_1 \cap V_2 \cap W). \end{aligned}$$

互换 V_1 与 V_2 得

$$\dim(V_2) = \dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_2 \cap W) - \dim(V_1 \cap V_2 \cap W).$$

两式相减即得

$$\dim(V_1) - \dim(V_2) = \dim(V_1 \cap W) - \dim(V_2 \cap W),$$

整理即得所求等式。