# 第十次作业解答

**习题 1.** 计算下列实矩阵的所有特征值和与特征值相关的特征向量:

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}.$$

*解.* **矩阵** $A$

矩阵 $A$ 是上三角阵，其特征多项式为

$$\chi_A(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda&-1&0\\0&\lambda&-1\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^3.$$

所以 $A$ 只有特征值 $\lambda=0$（三重根）。

求属于 $\lambda=0$ 的特征向量，即解 $(0\cdot I-A)x=0$，亦即 $Ax=0$:

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\implies x_2=0,\ x_3=0,\ x_1\ \text{自由}.$$

故特征空间为

$$V_A^0=\left\{\begin{pmatrix}t\\0\\0\end{pmatrix}\ \middle|\ t\in\mathbb{R}\right\},$$

一个特征向量可取为 $v_1=(1,0,0)^\mathsf{T}$（任意非零倍数）。注意几何重数仅为 1，代数重数为 3，矩阵 $A$ 不可对角化。

## 矩阵 $B$

先计算特征多项式:

$$\chi_B(\lambda)=\det(\lambda I-B)=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&-2\\-5&\lambda+3&-3\\1&0&\lambda+2\end{vmatrix}.$$

按第三行展开：

$$\chi_B(\lambda)=1\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & -2\\ \lambda+3 & -3\end{vmatrix}+0+(\lambda+2)\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1\\ -5 & \lambda+3\end{vmatrix}.$$

计算：

$$\begin{vmatrix}1 & -2\\ \lambda+3 & -3\end{vmatrix}=1\cdot(-3)-(-2)(\lambda+3)=-3+2\lambda+6=2\lambda+3,$$

$$\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1\\ -5 & \lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+3)-(-5)=(\lambda^2+\lambda-6)+5=\lambda^2+\lambda-1.$$

因此

$$\chi_B(\lambda)=(2\lambda+3)+(\lambda+2)(\lambda^2+\lambda-1)=(\lambda+2)(\lambda^2+\lambda-1)+2\lambda+3.$$

展开：

$$(\lambda+2)(\lambda^2+\lambda-1)=\lambda^3+\lambda^2-\lambda+2\lambda^2+2\lambda-2=\lambda^3+3\lambda^2+\lambda-2,$$

再加 $2\lambda+3$ 得

$$\chi_B(\lambda)=\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1=(\lambda+1)^3.$$

所以 $B$ 也只有特征值 $\lambda=-1$（三重根）。

求属于 $\lambda=-1$ 的特征向量，解 $(-I-B)x=0$，即 $(B+I)x=0$：

$$B+I=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 5 & -2 & 3\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

解齐次线性方程组：

$$\begin{cases}3x_1-x_2+2x_3=0,\\ 5x_1-2x_2+3x_3=0,\\ -x_1-x_3=0.\end{cases}$$

由第三式得 $x_1=-x_3$。代入第一式：

$$3(-x_3)-x_2+2x_3=-3x_3-x_2+2x_3=-x_2-x_3=0 \implies x_2=-x_3.$$

第二式自动满足(可验证)。因此自由变量为 $x_3$, 取 $x_3 = t$, 则 $x_1 = -t$, $x_2 = -t$。特征空间为

$$V_B^{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ -t \\ t \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\},$$

一个特征向量可取为 $v = (-1, -1, 1)^\mathsf{T}$。同样几何重数为 1,代数重数为 3,$B$ 也不可对角化。

**总结:**

- 矩阵 $A$:唯一特征值 0,特征向量形如 $(t, 0, 0)^\mathsf{T}$。
- 矩阵 $B$:唯一特征值 $-1$,特征向量形如 $(-t, -t, t)^\mathsf{T}$。

$\square$

**习题 2.** 设 $A \in \mathrm{M}_n(F)$ 是如下分块上三角形

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & * & * & \cdots & * \\ O & A_2 & * & \cdots & * \\ O & O & A_3 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & * \\ O & O & O & \cdots & A_k \end{pmatrix},$$

其中 $A_i \in \mathrm{M}_{n_i}(F)$, $\sum n_i = n$, $*$ 表示任意矩阵。证明: $\chi_A = \chi_{A_1}\chi_{A_2}\cdots\chi_{A_k}$.

*解.* 设 $\lambda$ 是给定域 $F$ 中的一个变量, 考虑特征多项式 $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$。由于 $\lambda I_n - A$ 也是分块上三角矩阵:

$$\lambda I_n - A = \begin{pmatrix} \lambda I_{n_1} - A_1 & * & \cdots & * \\ O & \lambda I_{n_2} - A_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & \lambda I_{n_k} - A_k \end{pmatrix}.$$

分块上三角矩阵的行列式等于其对角块行列式的乘积。因此

$$\det(\lambda I_n - A) = \det(\lambda I_{n_1} - A_1) \cdot \det(\lambda I_{n_2} - A_2) \cdots \det(\lambda I_{n_k} - A_k).$$

这正是 $\chi_{A_1}(\lambda)\chi_{A_2}(\lambda)\cdots\chi_{A_k}(\lambda)$,证毕。 $\square$

**习题 3.** 设 $A \in \mathrm{M}_n(F)$，$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathrm{spec}_F(A)$ 且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$。设 $x_1, x_2 \in F^n$ 分别是 $A$ 关于 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 的特征向量。证明：$x_1 + x_2$ 不是 $A$ 的特征向量。

*解.* 假设 $x_1 + x_2$ 是 $A$ 的特征向量，则存在标量 $\mu \in F$ 使得

$$A(x_1 + x_2) = \mu(x_1 + x_2).$$

由特征向量的定义，$Ax_1 = \lambda_1 x_1$，$Ax_2 = \lambda_2 x_2$，代入得

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \mu x_1 + \mu x_2.$$

整理后得到

$$(\lambda_1 - \mu)x_1 + (\lambda_2 - \mu)x_2 = 0.$$

由于 $x_1$ 和 $x_2$ 属于不同的特征值，它们是线性无关的（这是线性代数中的基本结论，可以简单证明：否则若 $x_1, x_2$ 线性相关，则存在非零常数 $c$ 使得 $x_2 = cx_1$，于是 $\lambda_2 c x_1 = \lambda_2 x_2 = Ax_2 = A(cx_1) = cAx_1 = c\lambda_1 x_1$，矛盾）。因此系数必须全为零：

$$\lambda_1 - \mu = 0, \quad \lambda_2 - \mu = 0.$$

由此推出 $\lambda_1 = \mu = \lambda_2$，与 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 矛盾。故假设不成立，$x_1 + x_2$ 不是 $A$ 的特征向量。 □

**习题 4.** 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(F)$ 且 $A \sim_s B$（即 $A$ 与 $B$ 相似）。

(i) 证明：$\mathrm{spec}_F(A) = \mathrm{spec}_F(B)$。

(ii) 设 $\lambda \in \mathrm{spec}_F(A)$，$V_A^\lambda$ 是 $A$ 关于 $\lambda$ 的特征子空间，$V_B^\lambda$ 是 $B$ 关于 $\lambda$ 的特征子空间。证明：$\dim(V_A^\lambda) = \dim(V_B^\lambda)$。

(iii) 设 $A = P^{-1}BP$，其中 $P \in \mathrm{GL}_n(F)$。则 $v \in V_A^\lambda$ 当且仅当 $Pv \in V_B^\lambda$。

*解.* (i) 因为 $A \sim_s B$，存在可逆矩阵 $P$ 使得 $B = P^{-1}AP$。则特征多项式

$$\begin{aligned}
\chi_B(\lambda) &= \det(\lambda I - B) \\
&= \det(\lambda I - P^{-1}AP) \\
&= \det(P^{-1}(\lambda I - A)P) \\
&= \det(P^{-1})\det(\lambda I - A)\det(P) \\
&= \det(\lambda I - A) = \chi_A(\lambda).
\end{aligned}$$

特征多项式相同，故特征值集合 $\mathrm{spec}_F(A) = \mathrm{spec}_F(B)$。

(ii) 设 $\lambda$ 为公共特征值，则 $A-\lambda I$ 与 $B-\lambda I=P^{-1}(A-\lambda I)P$ 相似，故秩相同：$\mathrm{rank}(B-\lambda I)=\mathrm{rank}(A-\lambda I)$。特征子空间的维数等于 $n-\mathrm{rank}(A-\lambda I)$，因此相等。

(iii) 设 $A=P^{-1}BP$，则 $B=PAP^{-1}$。若 $v\in V_A^\lambda$，即 $Av=\lambda v$。两边左乘 $P$ 得 $PAv=\lambda Pv$，但 $PA=BP$（因为 $B=PAP^{-1}$ 蕴涵 $BP=PA$），故 $B(Pv)=\lambda(Pv)$，因此 $Pv\in V_B^\lambda$。反之，若 $Pv\in V_B^\lambda$，即 $B(Pv)=\lambda(Pv)$，用 $P^{-1}$ 左乘得 $P^{-1}BPv=\lambda v$，而 $P^{-1}BP=A$，故 $Av=\lambda v$，$v\in V_A^\lambda$。证毕。

□

**习题 5.** （选做）设 $V$ 是域 $F$ 上的 $n$ 维线性空间，$\mathcal{A}$ 是 $V$ 上的线性算子。证明：$\mathcal{A}$ 的极小多项式 $\mu_{\mathcal{A}}$ 的次数小于或等于 $n$。

*解.* 由命题 6.4（第 9 周讲义/科斯特利金第二卷第 56 页习题 9），存在非零向量 $v\in V$，使得 $\mu_{\mathcal{A},v}=\mu_{\mathcal{A}}$，考虑由 $v$ 生成的循环子空间

$$Z(v)=\mathrm{span}\{v,\mathcal{A}v,\mathcal{A}^2v,\dots\}.$$

由于 $V$ 是 $n$ 维的，存在最小的正整数 $k$ 使得 $v,\mathcal{A}v,\dots,\mathcal{A}^{k-1}v$ 线性无关而 $\mathcal{A}^kv$ 可由它们线性表示，从而 $\mu_{\mathcal{A},v}$ 的次数为 $k$ 且 $k\le n$。也即 $\mu_{\mathcal{A}}$ 的次数为 $k$ 且不超过 $n$。 □

# 可交换矩阵的同时上三角化与对角化

**定理 1.** 设 $A$ 和 $B$ 均是 $n$ 阶复方阵，且 $AB=BA$，证明：存在矩阵 $P$，使得 $P^{-1}AP$ 和 $P^{-1}BP$ 同为上三角矩阵。

*证明.* 对矩阵的阶数 $n$ 作数学归纳法。

当 $n=1$ 时，结论显然成立。

假设对于所有阶数小于 $n$ 的矩阵结论成立，现考虑 $n$ 阶可交换复方阵 $A$ 与 $B$。

因为 $A$ 是复矩阵，故存在特征值 $\lambda\in\mathbb{C}$。设

$$V_\lambda=\{\,x\in\mathbb{C}^n\mid Ax=\lambda x\,\}$$

为 $A$ 的属于 $\lambda$ 的特征子空间，则 $V_\lambda\neq\{0\}$。对任意 $x\in V_\lambda$，由 $AB=BA$ 得

$$A(Bx)=B(Ax)=B(\lambda x)=\lambda(Bx),$$

故 $Bx \in V_\lambda$，即 $V_\lambda$ 是 $B$ 的不变子空间。将 $B$ 限制在 $V_\lambda$ 上，作为 $V_\lambda$ 上的复线性变换必有特征值及对应的特征向量。因此存在非零向量 $v \in V_\lambda$ 及 $\mu \in \mathbb{C}$，使得 $Bv = \mu v$。于是 $v$ 是 $A$ 与 $B$ 的公共特征向量。

将 $v$ 扩充为 $\mathbb{C}^n$ 的一组基 $v, v_2, \ldots, v_n$，并令 $P_1 = (v, v_2, \ldots, v_n)$ 为以这些基向量为列的可逆矩阵。在这组基下，线性变换 $A$ 和 $B$ 的矩阵分别为

$$P_1^{-1}AP_1 = \begin{pmatrix} \lambda & r \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}, \qquad P_1^{-1}BP_1 = \begin{pmatrix} \mu & s \\ 0 & B_1 \end{pmatrix},$$

其中 $A_1, B_1$ 为 $n-1$ 阶复方阵，$r, s$ 为 $1 \times (n-1)$ 的行向量。

由 $A$ 与 $B$ 可交换，即

$$(P_1^{-1}AP_1)(P_1^{-1}BP_1) = (P_1^{-1}BP_1)(P_1^{-1}AP_1),$$

直接计算分块乘法得

$$\begin{pmatrix} \lambda\mu & \lambda s + rB_1 \\ 0 & A_1B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu\lambda & \mu r + sA_1 \\ 0 & B_1A_1 \end{pmatrix}.$$

比较右下角块得 $A_1B_1 = B_1A_1$，即 $A_1$ 与 $B_1$ 仍为可交换的 $n-1$ 阶复方阵。

根据归纳假设，存在 $n-1$ 阶可逆矩阵 $Q$，使得 $Q^{-1}A_1Q$ 与 $Q^{-1}B_1Q$ 同为上三角矩阵。现构造 $n$ 阶可逆矩阵

$$P = P_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix},$$

则有

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & r \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & rQ \\ 0 & Q^{-1}A_1Q \end{pmatrix},$$

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu & s \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & sQ \\ 0 & Q^{-1}B_1Q \end{pmatrix}.$$

由于 $Q^{-1}A_1Q$ 和 $Q^{-1}B_1Q$ 均为上三角矩阵，且 $rQ, sQ$ 为行向量，上述两矩阵显然也是上三角矩阵。至此，我们找到了可逆矩阵 $P$ 使得 $P^{-1}AP$ 与 $P^{-1}BP$ 同时为上三角矩阵。

由数学归纳法原理，命题对任意正整数 $n$ 成立。 $\square$

**定理 2.** 设 $A, B$ 为 $n$ 阶复方阵，满足 $AB = BA$。若 $A$ 与 $B$ 均可对角化，则存在可逆矩阵 $U$，使得 $U^{-1}AU$ 和 $U^{-1}BU$ 同为对角矩阵（即 $A$ 与 $B$ 可同时对角化）。

*证明.* **第一步：将 $A$ 对角化。**
因为 $A$ 可对角化，存在可逆矩阵 $P$，使得

$$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & & \\ & \lambda_2 I_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_k I_{n_k} \end{pmatrix},$$

其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ 是 $A$ 的互异特征值，且 $n_1 + \cdots + n_k = n$。这里 $\Lambda$ 是分块标量矩阵。

令 $B_1 = P^{-1}BP$。由 $AB = BA$ 得

$$\Lambda B_1 = P^{-1}AP\, P^{-1}BP = P^{-1}ABP = P^{-1}BAP = P^{-1}BP\, P^{-1}AP = B_1\Lambda.$$

将 $B_1$ 写成分块形式 $(B_{ij})$，其中 $B_{ij}$ 为 $n_i \times n_j$ 矩阵。由 $\Lambda B_1 = B_1\Lambda$，比较 $(i, j)$-块得

$$\lambda_i B_{ij} = \lambda_j B_{ij}.$$

当 $i \neq j$ 时，$\lambda_i \neq \lambda_j$，故 $(\lambda_i - \lambda_j)B_{ij} = 0$，因此 $B_{ij} = 0$。于是 $B_1$ 具有与 $\Lambda$ 相同的块对角结构：

$$B_1 = P^{-1}BP = \begin{pmatrix} B_{11} & & & \\ & B_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_{kk} \end{pmatrix},$$

其中每个 $B_{ii}$ 为 $n_i$ 阶方阵。

**第二步：利用 $B$ 可对角化得到各块可对角化。**
因为 $B$ 可对角化，所以 $B_1 = P^{-1}BP$ 也可对角化。一个块对角矩阵可对角化，当且仅当每个对角块均可对角化（因其最小多项式是各块最小多项式之最小公倍式，无重根推出各块无重根，参考第十一周讲义定理 8.20）。因此对每个 $i = 1, \ldots, k$，$B_{ii}$ 可对角化。于是存在 $n_i$ 阶可逆矩阵 $Q_i$，使得

$$Q_i^{-1}B_{ii}Q_i = D_i,$$

其中 $D_i$ 为 $n_i$ 阶对角矩阵。

**第三步：构造同时对角化的变换**。

令

$$Q=\begin{pmatrix}Q_1&&&\\&Q_2&&\\&&\ddots&\\&&&Q_k\end{pmatrix}_{n\times n},\quad U=PQ.$$

则 $U$ 可逆。计算

$$\begin{aligned}U^{-1}AU=&Q^{-1}(P^{-1}AP)Q=Q^{-1}\Lambda Q\\=&\begin{pmatrix}Q_1^{-1}&&&\\&Q_2^{-1}&&\\&&\ddots&\\&&&Q_k^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 I_{n_1}&&&\\&\lambda_2 I_{n_2}&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_k I_{n_k}\end{pmatrix}\\&\begin{pmatrix}Q_1&&&\\&Q_2&&\\&&\ddots&\\&&&Q_k\end{pmatrix}=\Lambda.\end{aligned}$$

再看 $B$：

$$\begin{aligned}U^{-1}BU=&Q^{-1}(P^{-1}BP)Q=Q^{-1}B_1Q\\=&\begin{pmatrix}Q_1^{-1}&&&\\&Q_2^{-1}&&\\&&\ddots&\\&&&Q_k^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11}&&&\\&B_{22}&&\\&&\ddots&\\&&&B_{kk}\end{pmatrix}\\&\begin{pmatrix}Q_1&&&\\&Q_2&&\\&&\ddots&\\&&&Q_k\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$
= \begin{pmatrix} Q_1^{-1}B_{11}Q_1 & & & \\ & Q_2^{-1}B_{22}Q_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & Q_k^{-1}B_{kk}Q_k \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} D_1 & & & \\ & D_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_k \end{pmatrix},
$$

这是一个对角矩阵。

因此，我们找到了可逆矩阵 $U$，使得 $U^{-1}AU$ 和 $U^{-1}BU$ 同时为对角阵。 □

**推论 1.** 设 $A, B$ 为 $n$ 阶复方阵,则 $A$ 与 $B$ 可同时对角化当且仅当 $AB = BA$ 且 $A$ 与 $B$ 均可对角化。

*证明.* 我们前面证明了其中一个方向，而反方向是显然的，只需注意到若存在 $n$ 阶可逆矩阵 $P$，使得 $P^{-1}AP = \Lambda_1$，$P^{-1}BP = \Lambda_2$ 是两个对角阵，则

$$
\begin{aligned}
AB = P\Lambda_1P^{-1}P\Lambda_2P^{-1} &= P\Lambda_1\Lambda_2P^{-1} \\
&= P\Lambda_2\Lambda_1P^{-1} \\
&= P\Lambda_2P^{-1}P\Lambda_1P^{-1} = BA
\end{aligned}
$$

□