习题课 11

1 设 $S=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$，说明 S 作为实矩阵不可对角化，但作为复矩阵可对角化

证明 $\det(\lambda I-S)=t^2+1$，作为实矩阵，S 的特征多项式无实根，故不可对角化；作为复矩阵，有 $2=n$ 个互异复根，故可对角化（判别法 I）

2. 设 $D: \mathbb{R}[x]_{<n}\longrightarrow \mathbb{R}[x]_{<n}$，$f\mapsto \dfrac{df}{dx}$. $A=xD$，$B=(\mathcal{E}+D)^2$

(i) 证明 A 和 B 都是线性算子

(ii) 判断 A 与 B 能否对角化，说明理由

证明：已知 D 为线性算子

(i) $\forall\, r_1,r_2\in\mathbb{R}$，$f_1,f_2\in\mathbb{R}[x]$

$$A(r_1f_1+r_2f_2)=x\cdot\frac{d(r_1f_1+r_2f_2)}{dx}=r_1x\frac{df_1}{dx}+r_2x\frac{df_2}{dx}=r_1Af_1+r_2Af_2.$$

故 A 为线性算子

由于线性算子保持加法和复合封闭，故 $B=(\mathcal{E}+D)^2$ 仍为线性算子

(ii) $\{1,x,\cdots,x^{n-1}\}$ 为 $\mathbb{R}[x]_{<n}$ 的一组基，在此基下：

$A(1)=0$

$A(x)=x$

$A(x^2)=2x^2$

$\cdots\cdots$

$A(x^{n-1})=(n-1)x^{n-1}$

$$\Longrightarrow A(1,x,\cdots,x^{n-1})=(1,x,\cdots,x^{n-1})\begin{pmatrix}0 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n-1\end{pmatrix}$$

故 A 可以对角化

对于 B，令 $f(t)=(t+1)^2$，$B=f(D)$

$$D(1,x\cdots x^{n-1})=(1,x\cdots x^{n-1})\begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & n-1\\ & & & 0\end{pmatrix}$$

$$B(1,x,\cdots x^{n-1})=(1,x\cdots x^{n-1})\begin{pmatrix}1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow B=f(D)$ 的特征值只有 $f(0)=1$

若 B 可对角化，则特征值 1 的特征向量要"填满"整个空间

即 $B-\varepsilon$ 为零映射，但 $(B-\varepsilon)(x)=(D^2+2D)(x)=2D(x)=2$

矛盾，故 B 不可对角化.（不能用 D 特征值只有 0 推 B 特征值只有1）

3. 设 A 为域 F 上的线性算子，$\lambda\in \mathrm{spec}_F(A)$. 再设 $v\in V$ 是 A 关于 λ 的特征向量. 证明：$\forall f\in F[t]$，$f(\lambda)\in \mathrm{spec}_F(f(A))$，$v$ 是 $f(A)$ 关于 $f(\lambda)$ 的特征向量.

证明：由假设 $Av=\lambda v$，设 $f(t)=a_nt^n+\cdots+a_1t+a_0$，$a_n\neq 0$

$A^2v=A(\lambda v)=\lambda^2 v$

$\cdots$

$A^nv=A(A^{n-1}v)=\lambda^n v$

$\Longrightarrow f(A)v=(a_n\lambda^n+\cdots+a_1\lambda+a_0)v$

$=f(\lambda)v$

故 $f(\lambda)\in \mathrm{spec}_F(f(A))$，$v$ 是 $f(A)$ 关于 $f(\lambda)$ 的特征向量.

4. $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$，$v=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$w=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，求 $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}[A]\cdot v$ 和 $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}[A]w$

解：$Av=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$，故 $\mathbb{R}[A]\cdot v=\mathrm{span}\{v\}$，$\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}[A]v=1$

$Aw=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$A^2w=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\mathrm{span}\{w,Aw,A^2w\}=\mathbb{R}^3$，

故 $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}[A]w=3$

5. A 为域 F 上有限维线性空间上的线性算子，V 为 A 循环的.

证明：若 $V=V_1\oplus V_2$，V_1,V_2 为 A-子空间，则 V_1 和 V_2 也是 A 循环的.

证明：V 为 A 循环的，故 $\exists\ u\in V$，$V=F[A]\cdot u$.

又 $V=V_1\oplus V_2$，$\Longrightarrow \exists\ u_1\in V_1$，$u_2\in V_2$，$u=u_1+u_2$

由于 V_1,V_2 为 A-子空间，故 $F[A]\cdot u_1\subseteq V_1$，$F[A]\cdot u_2\subseteq V_2$（Ex9/3）

$\Longrightarrow V_1\oplus V_2=V=F[A]\cdot u=F[A]\cdot u_1+F[A]\cdot u_2$

$\subseteq V_1+V_2$

$\Longrightarrow V_1=F[A]\cdot u_1$，$V_2=F[A]\cdot u_2$.

6. 设 $f(t)=t^n+f_{n-1}t^{n-1}+\cdots+f_1t+f_0\in F[t]$，$f_i\in F$.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & & & & -f_0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -f_{n-2} \\ & & & 1 & -f_{n-1} \end{pmatrix}$$ ，证明：$\chi_A(t)=f(t)$.

证明：$\chi_A(t)=\begin{vmatrix} t & & 0 & f_0 \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & t & f_{n-2} \\ 0 & & -1 & f_{n-1}+t \end{vmatrix}$，按最后一列展开即可.

(以 $n=4$ 为例 $\begin{vmatrix} t & & & f_0 \\ -1 & t & & f_1 \\ & -1 & t & f_2 \\ & & -1 & t+f_3 \end{vmatrix} = f_0\cdot(-1)^{1+4}\cdot(-1)^3+f_1\cdot(-1)^{2+4}\cdot t + f_2(-1)^{3+4}\cdot -t^2+(t+f_3)(-1)^{4+4}t^3$

$= t^4+f_3t^3+f_2t^2+f_1t+f_0.$

矩阵相似的计算

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & y \end{pmatrix}$，$A \sim_s B$

(a) 求 y

(b) 求 P. s.t $P^{-1}AP=B$

解：(a) 两边求迹 $\Longrightarrow$ $1+4+5=2+2+y$，$y=6$

(b) 计算 2 的特征向量 $|2I-A|\,X=0 \Longrightarrow \beta_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

同理得到 6 的特征向量 $\beta_3\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$

$$P=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2. 设$A=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -k & -1 & k \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$，当$k$为何值时，$\exists P\in GL_n(\mathbb{R})$ s.t. $P^{-1}AP$为对角阵？求出P和对角阵。

解：$\chi_A(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda-1)(\lambda+1)^2$

对于特征值1，代数重数＝几何重数＝1

为了对角化，-1的几何重数必须为2 $\Longrightarrow$ $\operatorname{rank}(A+I)=1$

$\Longrightarrow k=0$

1的特征向量$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$　　-1特征向量$\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$

故$P=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & & \\ & -1 & \\ & & -1\end{pmatrix}$，

（利用极小多项式为$(\lambda-1)(\lambda+1)$也可以）

一个综合应用

3. 设A为m阶矩阵，B为n阶矩阵，求证：若A,B没有公共特征值（在$\mathbb{C}$中），则$AX=XB\Longrightarrow X=0$　$(X\in\mathbb{C}^{m\times n})$

证明：记A,B的特征多项式为$f(t),g(t)$，A,B无公共特征根

$\Longrightarrow \gcd(f(t),g(t))=1 \Longrightarrow f(B),g(A)$可逆.

另一方面，$AX=XB\Longrightarrow h(A)X=Xh(B)$，$\forall h\in\mathbb{C}[t]$.

由此得到$X=0$

下面是3个推论、

4. A,B特征值均大于0，$A^2=B^2\Longrightarrow A=B$

5. $A\in M_m(F)$, $B\in M_n(F)$, $V=F^{m\times n}$, 定义

$$\varphi: V\longrightarrow V$$
$$X\longrightarrow AX-XB$$

若 A,B 在 $\mathbb{C}$ 中无公共特征值，则 φ 为 V 上线性同构。

特别地，对 $\forall\ M\in F^{m\times n}$，$AX-XB=M$ 存在唯一解。

6 设 $A=\operatorname{diag}\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$ 为 n 阶分块对角阵，A_i 为 n_i 阶矩阵且两两无公共特征值。设 B 为 n 阶矩阵，满足 $AB=BA$，证明：$B=\operatorname{diag}\{B_1,\cdots,B_m\}$，其中 B_i 也是 n_i 阶矩阵。

证明：按照 A 的分块对 B 分块，设 $B=(B_{ij})$，其中 B_{ij} 为 $n_i\times n_j$ 阶矩阵，则 $AB=BA\Rightarrow A_iB_{ij}=B_{ij}\cdot A_j\Rightarrow B_{ij}=0\ (i\neq j)$，从而 $B=\operatorname{diag}\{B_{11},\cdots,B_{mm}\}$.

---

4 阶 Jordan 标准型的分类

设 $\chi_A(t)=(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)(t-\lambda_3)(t-\lambda_4)$

① 4个根互不相同

$$A\sim_s\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\lambda_3&\\&&&\lambda_4\end{pmatrix}=J_1(\lambda_1)\oplus J_1(\lambda_2)\oplus J_1(\lambda_3)\oplus J_1(\lambda_4)$$

② 有两个相同特征根 $(\lambda_1=\lambda_2)$

此时 $\chi_A(t)=(t-\lambda_1)^2(t-\lambda_2)(t-\lambda_3)$

2.1 若 $\mu_A(t)=(t-\lambda_1)^2(t-\lambda_2)(t-\lambda_3)$

则
$$A\sim_s\begin{pmatrix}\lambda_1&1&&\\&\lambda_1&&\\&&\lambda_2&\\&&&\lambda_3\end{pmatrix}=J_2(\lambda_1)\oplus J_1(\lambda_2)\oplus J_1(\lambda_3)$$

2.2 若 $\mu_A(t)=(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)(t-\lambda_3)$

则
$$A\sim_s\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_1&&\\&&\lambda_2&\\&&&\lambda_3\end{pmatrix}=J_1(\lambda_1)\oplus J_1(\lambda_1)\oplus J_1(\lambda_2)\oplus J_1(\lambda_3)$$

③ 若有两个二重根 $(\lambda_1=\lambda_2,\ \lambda_3=\lambda_4)$

$$\chi_A(t) = (t-\lambda_1)^2(t-\lambda_3)^2$$

3.1 $\mu_A(t) = (t-\lambda_1)(t-\lambda_3)$ $\quad A \sim_S \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \lambda_2 & \\ & & & \lambda_2 \end{pmatrix}$

3.2 $\mu_A(t) = (t-\lambda_1)^2(t-\lambda_3)$. 另一种同理

$$A \sim_S \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \lambda_3 & \\ & & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

3.3 $\mu_A(t) = (t-\lambda_1)^2(t-\lambda_3)^2$

$$A \sim_S \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \lambda_3 & 1 \\ & & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

④ 1个三重根 $(\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3)$

$$\chi_A(t) = (t-\lambda_1)^3(t-\lambda_4)$$

4.1 $\mu_A(t) = (t-\lambda_1)(t-\lambda_4)$ $\quad A \sim_S \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \lambda_1 & \\ & & & \lambda_4 \end{pmatrix}$

4.2 $\mu_A(t) = (t-\lambda_1)^2(t-\lambda_4)$ $\quad A \sim_S \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \lambda_1 & \\ & & & \lambda_4 \end{pmatrix}$

4.3 $\mu_A(t) = (t-\lambda_1)^3(t-\lambda_4)$ $\quad A \sim_S \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & 1 & \\ & & \lambda_1 & \\ & & & \lambda_4 \end{pmatrix}$

⑤ 1个四重根 $\chi_A(t)=(t-\lambda_1)^4$

5.1 $\mu_A(t)=t-\lambda_1$ $\quad A\sim_s\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_1&&\\&&\lambda_1&\\&&&\lambda_1\end{pmatrix}$

5.2 $\mu_A(t)=(t-\lambda_1)^2$ $\quad A\sim_s\begin{pmatrix}\lambda_1&1&&\\&\lambda_1&&\\&&\lambda_1&\\&&&\lambda_1\end{pmatrix}$ 或 $A\sim_s\begin{pmatrix}\lambda_1&1&&\\&\lambda_1&&\\&&\lambda_1&1\\&&&\lambda_1\end{pmatrix}$

此时需计算 $\operatorname{rank}(A-\lambda_1 I)$ (1或2)

5.3 $\mu_A(t)=(t-\lambda_1)^3$

$A\sim_s\begin{pmatrix}\lambda_1&1&&\\&\lambda_1&1&\\&&\lambda_1&\\&&&\lambda_1\end{pmatrix}$

5.4 $\mu_A(t)=(t-\lambda_1)^4$ $\quad A\sim_s\begin{pmatrix}\lambda_1&1&&\\&\lambda_1&1&\\&&\lambda_1&1\\&&&\lambda_1\end{pmatrix}$