第十二次作业解答

习题 1. 设二阶实矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\-1&4\end{pmatrix}\quad 和 \quad B=\begin{pmatrix}0&2\\1&1\end{pmatrix}.$$

对任意 $m\in\mathbb{N}$, 计算 A^m 和 B^m.

解. (1) 首先计算 A^m. 矩阵 A 的特征多项式为

$$\chi_A(t)=\det(tE-A)=\begin{vmatrix}t-1&-2\\1&t-4\end{vmatrix}=(t-1)(t-4)+2=t^2-5t+6=(t-2)(t-3).$$

因此 A 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=3$. 求特征值 $\lambda_1=2$ 对应的特征向量：由 $(2E-A)x=0$ 得 $\begin{pmatrix}1&-2\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=0$, 取 $v_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$. 求特征值 $\lambda_2=3$ 对应的特征向量：由 $(3E-A)x=0$ 得 $\begin{pmatrix}2&-2\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=0$, 取 $v_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. 令可逆矩阵 $P=(v_1,v_2)=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$, 其逆矩阵为 $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$. 由此可得 $A=P\,\mathrm{diag}(2,3)P^{-1}$, 从而对任意 $m\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}A^m=P\begin{pmatrix}2^m&0\\0&3^m\end{pmatrix}P^{-1}&=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^m&0\\0&3^m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2^{m+1}-3^m&-2^{m+1}+2\cdot3^m\\2^m-3^m&-2^m+2\cdot3^m\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(2) 接着计算 B^m. 矩阵 B 的特征多项式为

$$\chi_B(t)=\det(tE-B)=\begin{vmatrix}t&-2\\-1&t-1\end{vmatrix}=t(t-1)-2=t^2-t-2=(t-2)(t+1).$$

因此 B 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=-1$. 求特征值 $\lambda_1=2$ 对应的特征向量：由 $(2E-B)x=0$ 得 $\begin{pmatrix}2&-2\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=0$, 取 $u_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. 求特征值 $\lambda_2=-1$ 对应的特征向量：由 $(-E-B)x=0$ 得 $\begin{pmatrix}-1&-2\\-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=0$,

取 $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. 令可逆矩阵 $Q = (u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, 其逆矩阵为 $Q^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. 由此可得 $B = Q\operatorname{diag}(2, -1)Q^{-1}$, 从而对任意 $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} B^m = Q\begin{pmatrix} 2^m & 0 \\ 0 & (-1)^m \end{pmatrix} Q^{-1} =& \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^m & 0 \\ 0 & (-1)^m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ =& \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^m + 2(-1)^m & 2^{m+1} - 2(-1)^m \\ 2^m - (-1)^m & 2^{m+1} + (-1)^m \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

习题 2. 设 F 是域, $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 计算分块对角矩阵

$$M_1 = \begin{pmatrix} J_2 & O \\ O & J_2 \end{pmatrix}_{4\times 4}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} J_2 & O \\ O & J_3 \end{pmatrix}_{5\times 5} \quad 和 \quad M_3 = \begin{pmatrix} J_2 & O & O \\ O & J_3 & O \\ O & O & J_3 \end{pmatrix}_{8\times 8}$$

的秩, 特征多项式, 极小多项式和所有特征子空间的维数.

解. 注意到 J_k 是 k 阶标准若尔当块，其满足 $\operatorname{rank}(J_k) = k - 1$，且其唯独一个特征值为 0。分块对角矩阵的秩、特征多项式是各分块的相应指标之和（或积），极小多项式是各分块极小多项式的最小公倍式。且 J_k 的极小多项式为 t^k。对于特征值 0 的特征子空间，其维数等于几何重数，即 $\dim V_0 = n - \operatorname{rank}(M - 0E) = n - \operatorname{rank}(M)$。

(1) 对于 $M_1 = \operatorname{diag}(J_2, J_2)_{4\times 4}$:

- 秩: $\operatorname{rank}(M_1) = \operatorname{rank}(J_2) + \operatorname{rank}(J_2) = 1 + 1 = 2$.
- 特征多项式: $\chi_{M_1}(t) = \chi_{J_2}(t) \cdot \chi_{J_2}(t) = t^2 \cdot t^2 = t^4$.
- 极小多项式: $\mu_{M_1}(t) = \operatorname{lcm}(\mu_{J_2}(t), \mu_{J_2}(t)) = \operatorname{lcm}(t^2, t^2) = t^2$.
- 特征子空间维数: 唯一特征值为 0, 其特征子空间维数为 $\dim V_0 = 4 - \operatorname{rank}(M_1) = 4 - 2 = 2$.

(2) 对于 $M_2 = \operatorname{diag}(J_2, J_3)_{5\times 5}$:

- 秩: $\operatorname{rank}(M_2) = \operatorname{rank}(J_2) + \operatorname{rank}(J_3) = 1 + 2 = 3$.
- 特征多项式: $\chi_{M_2}(t) = \chi_{J_2}(t) \cdot \chi_{J_3}(t) = t^2 \cdot t^3 = t^5$.
- 极小多项式: $\mu_{M_2}(t) = \operatorname{lcm}(\mu_{J_2}(t), \mu_{J_3}(t)) = \operatorname{lcm}(t^2, t^3) = t^3$.
- 特征子空间维数: 唯一特征值为 0, 其特征子空间维数为 $\dim V_0 = 5 - \operatorname{rank}(M_2) = 5 - 3 = 2$.

(3) 对于 $M_3 = \operatorname{diag}(J_2, J_3, J_3)_{8\times 8}$:

- 秩: $\operatorname{rank}(M_3) = \operatorname{rank}(J_2) + \operatorname{rank}(J_3) + \operatorname{rank}(J_3) = 1 + 2 + 2 = 5$.
- 特征多项式: $\chi_{M_3}(t) = \chi_{J_2}(t) \cdot \chi_{J_3}(t) \cdot \chi_{J_3}(t) = t^2 \cdot t^3 \cdot t^3 = t^8$.
- 极小多项式: $\mu_{M_3}(t) = \operatorname{lcm}(\mu_{J_2}(t), \mu_{J_3}(t), \mu_{J_3}(t)) = \operatorname{lcm}(t^2, t^3, t^3) = t^3$.
- 特征子空间维数: 唯一特征值为 0, 其特征子空间维数为 $\dim V_0 = 8 - \operatorname{rank}(M_3) = 8 - 5 = 3$.

□

习题 3. 设 A 是域 F 上 n 维线性空间上的线性算子, $n > 0$. 证明: A 既是可对角化的又是循环的当且仅当 A 在 F 中有 n 个互不相同的特征值.

证明. (参照例 10.4) ($\Leftarrow$) 设 A 在 F 中有 n 个互不相同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. 由不同特征值对应的特征向量线性无关, 因为共有 n 个不同的特征值, 所以存在 n 个线性无关的特征向量, 它们构成整个空间的一组基, 因此 A 可对角化。所以 A 在某组基下的矩阵 J_A 是一个对角矩阵, 记为 $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots. \lambda_n)$, 则 $\mu_A = \operatorname{lcm}(t-\lambda_1, \ldots, t-\lambda_n)$, 且 $\chi_A = (t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_n)$, 由于 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 两两不同, 可得 $\mu_A = \chi_A$, 故 A 是循环的。

($\Rightarrow$) 反之, 设 A 既是可对角化的又是循环的。因为 A 可对角化, 所以 A 在某组基下的矩阵 J_A 是一个对角矩阵, 记为 $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots. \lambda_n)$, 则 $\mu_A = \operatorname{lcm}(t - \lambda_1, \ldots, t - \lambda_n)$, 且 $\chi_A = (t - \lambda_1)\cdots(t - \lambda_n)$, 又 A 是循环的可得 $\mu_A = \chi_A$, 故 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 两两不同。 □

习题 4. 设 $A \in \mathrm{M}_5(\mathbb{C})$ 且 $\chi_A = (t-3)^4(t-2)$.

(i) 当 $\operatorname{rank}(A - 3E) = 1$ 时, 计算 J_A.

(ii) 当 $\operatorname{rank}(A - 3E) = 2$ 时, 计算 J_A.

解. 由特征多项式可知，特征值 $\lambda = 2$ 的代数重数为 1，因此它必然对应一个 1 阶若尔当块 $J_1(2) = (2)$。对于特征值 $\lambda = 3$，其代数重数为 4，其若尔当块的总阶数之和为 4。特征值 3 对应的若尔当块的个数（即几何重数）为 $n_3 = 5 - \operatorname{rank}(A - 3E)$。

(i) 当 $\operatorname{rank}(A-3E) = 1$ 时: 特征值 3 对应的若尔当块的个数为 $5-1 = 4$。因为特征值 3 的代数重数是 4，要将这 4 个位置分成 4 个若尔当块，唯一的可能分法是分成 4 个 1 阶块，即 $1+1+1+1$。因此，特征值 3 对应 4 个 1 阶块。结合特征值 2 的 1 个 1 阶块，整个矩阵可对角化:

$$J_A = \operatorname{diag}(3, 3, 3, 3, 2).$$

(ii) 当 $\operatorname{rank}(A-3E) = 2$ 时: 特征值 3 对应的若尔当块的个数为 $5-2 = 3$。因为特征值 3 的代数重数是 4，要将这 4 个位置分成 3 个若尔当块，由整数拆分 $4 = 2+1+1$ 可知，唯一的可能分法是包含 1 个 2 阶块和 2 个 1 阶块。因此，特征值 3 对应一个 2 阶块 $J_2(3)$ 和两个 1 阶块 $J_1(3)$。结合特征值 2 的 1 阶块，可得若尔当标准形为:

$$J_A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

□

习题 5. (选做) 设 V 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间, $V \neq \{\mathbf{0}\}$, A 是 V 上的线性算子. 证明: A 有一维或二维不变子空间.

证明. 设 $\mu_A(t) \in \mathbb{R}[t]$ 是算子 A 的极小多项式。根据实系数多项式因式分解定理，$\mu_A(t)$ 在实数域上可以分解为一次不可约因子和二次不可约因子的乘积。因此，$\mu_A(t)$ 必然至少包含一个实系数的一次或二次不可约多项式因式 $p(t)$。

情况 1: 若 $p(t) = t - a$ 是一次不可约因子（其中 $a \in \mathbb{R}$）。由于 $p(t) \mid \mu_A(t)$，可知 $\det(aE - A) = 0$，即 a 是 A 的一个实特征值。因此存在非零向量 $v \in V$ 满足 $Av = av$。令 $W = \operatorname{span}\{v\}$，则 W 是 V 的一个 1 维子空间。对任意 $kx \in W$，有 $A(kx) = k(Av) = (ka)v \in W$，所以 W 是 A 的一维不变子空间。

情况 2：若 A 没有实特征值，则 $\mu_A(t)$ 的不可约因子全为二次式。令 $p(t) = t^2 + bt + c$ 是其中一个二次不可约因子（其中 $b, c \in \mathbb{R}$ 且 $b^2 - 4c < 0$）。因为 $p(t) \mid \mu_A(t)$，所以算子多项式 $p(A) = A^2 + bA + cE$ 不是单射（否则若所有的 $p(A)$ 均是单射，其整个乘积多项式亦为单射，与极小多项式满足 $\mu_A(A) = O$ 矛盾）。从而存在一个非零向量 $v \in V$ 使得 $(A^2 + bA + cE)v = \mathbf{0}$，即 $A^2 v = -bAv - cv$。构造子空间 $W = \mathrm{span}\{v, Av\}$。由于 A 没有实特征值，向量 Av 与 v 必然线性无关（否则若 $Av = \lambda v$，则 λ 是实特征值，矛盾）。因此 $\dim W = 2$。现在检验 W 在 A 下的封闭性：对 W 中的基向量 v 和 Av 实施算子 A，有 $A(v) = Av \in W$，以及 $A(Av) = A^2 v = -b(Av) - cv \in W$。由线性组合的封闭性可知，对任意 $w \in W$ 均有 $Aw \in W$。因此，W 是 A 的一个二维不变子空间。

综上所述，线性算子 A 必然存在一维或二维的不变子空间。 $\square$

进阶习题 1. 设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间，A 为 V 上的线性算子。记 A 的极小多项式为 $m_A(\lambda)$，且 $\deg m_A(\lambda) = k$。定义 A 的**中心化子**为：

$$C(A) = \{B \in \mathcal{L}(V) \mid BA = AB\}$$

(1) 证明：线性子空间 $W = \{Bv \mid B \in C(A)\}$ 的维数满足 $\dim W \geq k$，其中 v 是 A 的一个同归于尽向量（即 v 关于 A 的极小多项式就是 A 的极小多项式）。

(2) 证明：若 $\deg m_A(\lambda) = n$，则 $C(A) = \{f(A) \mid f(\lambda) \in F[\lambda]\}$，即所有与 A 交换的算子都可以表示为 A 的多项式。

证明. (1) 设 $v \in V$ 是 A 的一个同归于尽向量，则 v 关于 A 的极小零化多项式等于 A 的极小多项式 $m_A(\lambda)$。因为 $\deg m_A(\lambda) = k$，所以向量组

$$v, Av, A^2 v, \ldots, A^{k-1} v$$

线性无关。

对于任意的非负整数 i，显然 $A^i \in C(A)$。从而对于任意的 $f(\lambda) \in F[\lambda]$，都有 $f(A) \in C(A)$。根据子空间 W 的定义，有：

$$\mathrm{span}(v, Av, A^2 v, \ldots, A^{k-1} v) = \{f(A)v \mid f(\lambda) \in F[\lambda]\} \subseteq W$$

由于该线性无关组包含 k 个向量，其生成的子空间维数为 k，故 $\dim W \geq k$。

(2) 当 $\deg m_A(\lambda) = n$ 时，由第 (1) 问可知 $\dim W \geq n$。又因为 W 是 V 的子空间且 $\dim V = n$，所以必然有 $W = V$。

这说明对于空间中的任意向量 $u \in V$，都存在某个 $B_u \in C(A)$ 使得 $u = B_u v$。特别是，由于 $\dim W = n$，向量组 $\{v, Av, \ldots, A^{n-1}v\}$ 构成了 V 的一组基。

现任取 $B \in C(A)$。因为 $Bv \in V = W$，所以必然存在一个次数小于 n 的多项式 $f(\lambda) \in F[\lambda]$，使得：

$$Bv = f(A)v$$

我们证明对于 V 中的任意向量 x,都有 $Bx = f(A)x$。因为 $\{v, Av, \ldots, A^{n-1}v\}$ 是 V 的一组基,故 x 可以表示为 A 的多项式作用在 v 上,即存在 $g(\lambda) \in F[\lambda]$ 使得 $x = g(A)v$。

利用 B 与 A 的可交换性（从而 B 与 $g(A)$、$f(A)$ 均可交换），我们有：

$$Bx = B(g(A)v) = g(A)(Bv) = g(A)(f(A)v) = f(A)(g(A)v) = f(A)x$$

由于此式对任意 $x \in V$ 均成立，根据线性算子的相等定义，必有 $B = f(A)$。

反之，显然任何 A 的多项式 $f(A)$ 都属于 $C(A)$。综上所述，$C(A) = \{f(A) \mid f(\lambda) \in F[\lambda]\}$。

□

进阶习题 2. 设 V 是数域 F 上的有限维线性空间，A 为 V 上的线性算子。W_1, W_2 是 V 的两个 A-不变子空间。记算子 A 限制在子空间 W_i 上的极小多项式为 $m_i(\lambda)$ $(i = 1, 2)$。

(1) 证明：若 $v_1 \in W_1$ 和 $v_2 \in W_2$ 分别是 $A|_{W_1}$ 和 $A|_{W_2}$ 的同归于尽向量，且 $\gcd(m_1(\lambda), m_2(\lambda)) = 1$，则向量 $v = v_1 + v_2$ 关于 A 的极小多项式是 $m_1(\lambda)m_2(\lambda)$。

(2) 证明：若 $\gcd(m_1(\lambda), m_2(\lambda)) = 1$，则 $W_1 \cap W_2 = \{0\}$。

证明. (1) 记 v 关于 A 的极小零化多项式为 $m_v(\lambda)$。首先，因为 $m_1(A)$ 零化 W_1，$m_2(A)$ 零化 W_2，且 $v_1 \in W_1, v_2 \in W_2$，我们有：

$$m_1(A)m_2(A)v = m_2(A)m_1(A)v_1 + m_1(A)m_2(A)v_2 = m_2(A)\cdot 0 + m_1(A)\cdot 0 = 0$$

由极小零化多项式的整除性质可知：$m_v(\lambda) \mid m_1(\lambda)m_2(\lambda)$。

反过来，根据 $m_v(\lambda)$ 的定义有 $m_v(A)(v_1 + v_2) = 0$，即：

$$m_v(A)v_1 = -m_v(A)v_2$$

因为 W_1 和 W_2 是 A-不变量子空间，所以上式左边属于 W_1，右边属于 W_2。用 $m_1(A)$ 作用于上式两边，由于 $m_1(A)v_1 = 0$，左边变为 0，从而：

$$m_1(A)m_v(A)v_2 = 0$$

又因为 v_2 是 $A|_{W_2}$ 的同归于尽向量，这意味着 v_2 关于 A 的极小零化多项式就是 $m_2(\lambda)$。由整除性质得：

$$m_2(\lambda) \mid m_1(\lambda)m_v(\lambda)$$

注意到已知条件 $\gcd(m_1(\lambda), m_2(\lambda)) = 1$，由多项式互素的性质可得 $m_2(\lambda) \mid m_v(\lambda)$。

同理，用 $m_2(A)$ 作用于 $m_v(A)v_1 = -m_v(A)v_2$ 的两边，利用 $m_2(A)v_2 = 0$ 可得 $m_2(A)m_v(A)v_1 = 0$。同理可导得 $m_1(\lambda) \mid m_v(\lambda)$。

既然 $m_1(\lambda) \mid m_v(\lambda)$ 且 $m_2(\lambda) \mid m_v(\lambda)$，且 $\gcd(m_1(\lambda), m_2(\lambda)) = 1$，则它们的乘积必能整除 $m_v(\lambda)$，即：

$$m_1(\lambda)m_2(\lambda) \mid m_v(\lambda)$$

由于 $m_v(\lambda)$ 与 $m_1(\lambda)m_2(\lambda)$ 都是首一多项式，且它们互相整除，故必有 $m_v(\lambda) = m_1(\lambda)m_2(\lambda)$。

(2) 任取 $x \in W_1 \cap W_2$，记 x 关于 A 的极小零化多项式为 $m_x(\lambda)$。因为 $x \in W_1$，且 $m_1(\lambda)$ 零化整个 W_1 空间，所以 $m_1(A)x = 0$，从而 $m_x(\lambda) \mid m_1(\lambda)$。同理，因为 $x \in W_2$，有 $m_2(A)x = 0$，从而 $m_x(\lambda) \mid m_2(\lambda)$。

因此，$m_x(\lambda)$ 是 $m_1(\lambda)$ 和 $m_2(\lambda)$ 的公因式。于是 $m_x(\lambda)$ 必须整除它们的最大公因式：

$$m_x(\lambda) \mid \gcd(m_1(\lambda), m_2(\lambda)) = 1$$

由于极小零化多项式规定为首一多项式，故只能有 $m_x(\lambda) = 1$。根据零化多项式的定义，$1 \cdot x = 0 \implies x = 0$。这说明交集中仅含有零向量，即 $W_1 \cap W_2 = \{0\}$。

$\square$