1. $R^3$, $x=(1,1,1)^t$, $y=(-2,0,1)^t$, 计算 $(x|y)$, $\|x\|$, $\|y\|$ 和 $x$ 与 $y$ 夹角.

解: $(x|y)=-1$, $\|x\|=\sqrt{3}$, $\|y\|=\sqrt{5}$

$$\cos\theta=\frac{(x|y)}{\|x\|\|y\|}=\frac{-1}{\sqrt{15}} \qquad \theta=\arccos-\frac{1}{\sqrt{15}}$$

2. $V$ 为欧式空间, $v_1,\cdots,v_k\in V$. $G=(v_i|v_j)_{k\times k}$. 证明: $G$ 半正定且 $G$ 正定当且仅当 $v_1,\cdots,v_k$ 线性无关.

证明: $\forall\ a=(a_1,\cdots,a_k)^t\in R^k$

$$a^TGa=(a_1,\cdots,a_k)G\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_k\end{pmatrix}=\left(\sum_{i=1}^k a_iv_i\,\Big|\,\sum_{j=1}^k a_jv_j\right)\geqslant 0$$

若 $G$ 正定, 设 $\exists\ a_1,\cdots,a_k$, $\sum_{i=1}^k a_iv_i=0$

则 $(a_1,\cdots,a_k)G\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_k\end{pmatrix}=0 \Longrightarrow a_1=\cdots=a_k=0$, 故 $v_1,\cdots,v_k$ 线性无关

反之, 若 $v_1,\cdots,v_k$ 线性无关, 设 $(b_1,\cdots,b_k)^t\in R^k$, 满足

$$(b_1,\cdots,b_k)G\begin{pmatrix}b_1\\\vdots\\b_k\end{pmatrix}=\left\|\sum_{i=1}^k b_iv_i\right\|^2=0\Longrightarrow\sum_{i=1}^k b_iv_i=0$$

$$\Longrightarrow b_1=b_2=\cdots=b_k=0$$

故 $G$ 正定

3. $R^4$, $v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$, $v_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$, 计算 $\langle v_1,v_2,v_3\rangle$ 的标准正交基.

解: $v_3=v_1-v_2$, 故 $\langle v_1,v_2,v_3\rangle=\langle v_1,v_2\rangle$

并且 $(v_1|v_2)=0$, $v_1$ 与 $v_2$ 已经正交. $\langle v_1,v_2\rangle$ 的单位正交基为 $\left\{\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}\right\}$.

4. $e_1,\cdots,e_m$ 为欧式空间 $V$ 的单位正交向量，$x\in V$. 证明：

(i) $\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{m}(x|e_i)^2$

(ii) 若 $x\in\langle e_1,\cdots,e_m\rangle$，则 (i) 中等号成立

$n\geq m$.

证明：(i) 将 $\{e_1,\cdots,e_m\}$ 扩充为 $V$ 的一组单位正交基 $\{e_1\cdots e_m,e_{m+1},\cdots e_n\}$

对 $x\in V$，$\exists\ a_1\cdots a_n\in\mathbb{R}$，$x=\sum_{i=1}^{n}a_ie_i$

则 $\|x\|^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2 \geq \sum_{i=1}^{m}a_i^2=\sum_{i=1}^{m}(x|e_i)^2$

(ii) (i) 中"="成立 $\Longleftrightarrow$ $a_{m+1}=\cdots=a_n=0 \Longleftrightarrow x\in\langle e_1,\cdots,e_m\rangle$.

5. 设 $V$ 为有限维欧式空间，$U_1,U_2\subseteq V$. 证明：

$$(U_1\cap U_2)^{\perp}=U_1^{\perp}+U_2^{\perp}$$

证明：我们先证对子空间 $V_1,V_2\subseteq V$，有

$$(V_1+V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}$$

① 若 $x\in(V_1+V_2)^{\perp}$，则 $x\in V_1^{\perp}$ 且 $x\in V_2^{\perp}$，故 $x\in V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}$

② 若 $x\in V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}$，则对 $\forall\, y\in V_1+V_2$，$\exists\ y_1\in V_1,\ y_2\in V_2$，

$y=y_1+y_2$，则 $(x|y)=(x|y_1)+(x|y_2)=0 \Rightarrow x\in(V_1+V_2)^{\perp}$.

令 $V_1=U_1^{\perp}$，$V_2=U_2^{\perp}$，则 $(U_1^{\perp}+U_2^{\perp})^{\perp}=U_1\cap U_2$

$$U_1^{\perp}+U_2^{\perp}=(U_1\cap U_2)^{\perp}$$

6. $A\in M_5(\mathbb{C})$，且 $\chi_A=(t-3)^4(t-2)$，再设 $\operatorname{rank}(A-3E)=3$.

求 $J_A$ 所有可能

解：由题目条件，$J_A=\begin{pmatrix}3&*_1&&&\\&3&*_2&&\\&&3&*_3&\\&&&3&\\&&&&2\end{pmatrix}$，其中 $*_1,*_2,*_3$ 中有两个位置为1.

故 $J_A=\begin{pmatrix}3&1&&&\\&3&1&&\\&&3&&\\&&&3&\\&&&&2\end{pmatrix}$ 或 $J_A=\begin{pmatrix}3&1&&&\\&3&&&\\&&3&1&\\&&&3&\\&&&&2\end{pmatrix}$.

一、给定矩阵，求Jordan标准型.

1.1 $A=\begin{pmatrix}-2&-1&-1&-1\\2&1&3&2\\1&1&0&1\\-1&-1&-2&-2\end{pmatrix}$, $\chi_A=t(t+1)^3$，求$J_A$

rank$(A+I)=2$，故$J_A=\begin{pmatrix}-1&1&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

1.2. $A=\begin{pmatrix}-2&1&3\\-22&11&33\\6&-3&-9\end{pmatrix}$

rank$A=1$

$\chi_A=t^3$，故$J_A=\begin{pmatrix}0&1&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}$

1.3 $\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&4&0&0\\3&0&4&0\\2&3&0&4\end{pmatrix}$

$\chi_A=(t-4)^4$

rank$(A-4I)=2$

rank$(A-4I)^2=0$

$J_A=\begin{pmatrix}4&1&&\\&4&&\\&&4&1\\&&&4\end{pmatrix}$

1.4 $\begin{pmatrix}1&2&4&7\\0&1&3&6\\0&0&1&4\\0&0&0&3\end{pmatrix}$

$\chi_A=(t-1)^3(t-3)$

rank$(A-I)=3$

rank$(A-I)^2=2$

rank$(A-I)^3=1$

$J_A=\begin{pmatrix}1&1&&\\&1&1&\\&&1&\\&&&3\end{pmatrix}$

1.5 $A\in M_{10}(\mathbb{C})$, $\chi_A=(t-1)^4(t-2)^3(t-3)^3$, $\mu_A=(t-1)^2(t-2)^2(t-3)^3$

求$J_A$

$$J_A=\begin{pmatrix}1&1&&&&&&&&\\&1&&&&&&&&\\&&1&&&&&&&\\&&&1&&&&&&\\&&&&2&1&&&&\\&&&&&2&&&&\\&&&&&&2&&&\\&&&&&&&3&1&\\&&&&&&&&3&1\\&&&&&&&&&3\end{pmatrix}$$

或 $$J_A=\begin{pmatrix}1&1&&&&&&&&\\&1&&&&&&&&\\&&1&1&&&&&&\\&&&1&&&&&&\\&&&&2&1&&&&\\&&&&&2&&&&\\&&&&&&2&&&\\&&&&&&&3&1&\\&&&&&&&&3&1\\&&&&&&&&&3\end{pmatrix}$$

1.6 $A\in M_6(\mathbb{C})$. $\chi_A=t^6$, $\mu_A=t^3$，求$J_A$

$J_A=\begin{pmatrix}0&1&&&&\\&0&1&&&\\&&0&&&\\&&&0&&\\&&&&0&\\&&&&&0\end{pmatrix}$ 或$J_A=\begin{pmatrix}0&1&&&&\\&0&1&&&\\&&0&&&\\&&&0&1&\\&&&&0&\\&&&&&0\end{pmatrix}$ 或$J_A=\begin{pmatrix}0&1&&&&\\&0&1&&&\\&&0&&&\\&&&0&1&\\&&&&0&1\\&&&&&0\end{pmatrix}$

## 二、标准正交基的相关计算

2.1. $R^4$，$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ 求 $\langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\rangle$ 的标准正交基，并扩充为 $R^4$ 的标准正交基。

解：$\beta_1=\alpha_1$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_1|\alpha_2)}{\|\alpha_1\|^2}\alpha_1=\frac{1}{2}(-1,-2,1,2)^T$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\beta_1|\alpha_3)}{\|\beta_1\|^2}\beta_1-\frac{(\beta_2|\alpha_3)}{\|\beta_2\|^2}\beta_2=\frac{1}{5}(-2,1,2,1)$$

再令 $\gamma_i=\dfrac{\beta_i}{\|\beta_i\|}\ (i=1,2,3)$

$\Longrightarrow \gamma_1=\frac{1}{\sqrt2}(1,0,1,0)^t$，$\gamma_2=\frac{1}{\sqrt{10}}(-1,-2,1,-2)$

$\gamma_3=\frac{1}{\sqrt{10}}(-2,1,2,1)$

令 $\alpha_4=(x_1,x_2,x_3,x_4)^t$ 与 $\gamma_i$ 正交 $(i=1.2.3)$

$$\Longrightarrow\begin{cases}x_1+x_3=0\\-x_2+x_3-x_4=0\\x_1+x_2+x_3+x_4=0\end{cases}\Longrightarrow (x_1,x_2,x_3,x_4)^t=x_2(0,1,0,-1)^t$$

令 $\gamma_4=\frac{1}{\sqrt2}(0,1,0,-1)$，$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$ 为所求。

2.2. (a) 求 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0\\2x_1+3x_2+5x_3+8x_4=0\end{cases}$ 解空间标准正交基

(b) 将 $(1,1,1,1,1)$，$(2,3,5,8,0)$ 扩充为 $R^5$ 的标准正交基。

解：(a) 解空间的基 $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}5\\-6\\0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

正交化后结果 $\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{14}}(2,-3,1,0,0)^t$

$\gamma_2=\frac{1}{\sqrt6}(1,0,-2,1,0)^t$

$\gamma_3=\frac{1}{\sqrt{21}}(-1,-\frac{3}{2},-\frac{5}{2},2,3)^t$

(b) $\varepsilon_1=\frac{1}{\sqrt5}(1,1,1,1,1)^t$，$\varepsilon_2=\frac{1}{\sqrt{930}}(-8,-3,7,22,-18)$，

$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$.

3. $S=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，求正交矩阵 $P\in GL_n(\mathbb{C})$，
$P^{-1}SP$ 为对角阵

解：$\chi_S=(\lambda-2)^2(\lambda+1)$

$\lambda=2$ 特征向量 $\alpha_1=(1,-1,0)^t$，$\alpha_2=(1,0,-1)^t$

$\lambda=-1$ 特征向量 $\alpha_3=(1,1,1)^t$

正交化后结果为：$w_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)^t$，$w_2=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^t$

$w_3=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t$

$P=(w_1,w_2,w_3)$，$P^{-1}SP=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$