习题解答

习题 1. 设 $\mathbb{R}^4$ 是标准欧式空间，子空间 $U \subset \mathbb{R}^4$ 是线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

的解空间。计算 $U^{\perp}$ 的一组单位正交基。

解. 方程组系数矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

在标准内积下，解空间 U 的正交补 $U^{\perp}$ 就是系数矩阵的行空间。令

$$\alpha_1 = (2, -1, 0, -1), \quad \alpha_2 = (1, 0, 1, 1).$$

对 α_1, α_2 施行 Gram–Schmidt 正交化：

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \alpha_1 = (2, -1, 0, -1), \\ \beta_2 &= \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = (1, 0, 1, 1) - \frac{1}{6}(2, -1, 0, -1) \\ &= \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, 1, \frac{7}{6} \right) = \frac{1}{6}(4, 1, 6, 7). \end{aligned}$$

单位化：

$$\|\beta_1\| = \sqrt{6}, \quad e_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{6}} \right);$$

$$\|\beta_2\| = \frac{\sqrt{102}}{6}, \quad e_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|} = \left(\frac{4}{\sqrt{102}}, \frac{1}{\sqrt{102}}, \frac{6}{\sqrt{102}}, \frac{7}{\sqrt{102}} \right).$$

因此 $U^{\perp}$ 的一组单位正交基为 e_1，e_2。 □

习题 2. 设 P 是 n 阶正交矩阵。证明：如果 P 是上三角的，则 P 是对角的。

证明. 因为 P 是正交矩阵，所以 $P^{-1} = P^{\mathsf{T}}$。已知 P 是上三角矩阵，故 P^{T} 是下三角矩阵。另一方面，可逆的上三角矩阵的逆矩阵仍为上三角矩阵，因此 P^{-1} 也是上三角矩阵。于是 $P^{\mathsf{T}} = P^{-1}$ 既是下三角矩阵又是上三角矩阵，从而 P^{T} 只能是对角矩阵。故 P 也是对角矩阵。 □

习题 3. 欧拉旋转矩阵是

$$A = (a_{ij}) \in M_3(\mathbb{R}),$$

其中

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \cos\psi\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi\sin\psi,\\
a_{12} &= \cos\psi\sin\varphi + \cos\theta\cos\varphi\sin\psi,\\
a_{13} &= \sin\psi\sin\theta,\\
a_{21} &= -\sin\psi\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi\cos\psi,\\
a_{22} &= -\sin\psi\sin\varphi + \cos\theta\cos\varphi\cos\psi,\\
a_{23} &= \cos\psi\sin\theta,\\
a_{31} &= \sin\theta\sin\varphi,\\
a_{32} &= -\sin\theta\cos\varphi,\\
a_{33} &= \cos\theta.
\end{aligned}$$

设

$$D = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

验证 $A = BCD$（至少验证三个系数），并证明 A 是正交矩阵。

解. 记 $c_\varphi = \cos\varphi$, $s_\varphi = \sin\varphi$, $c_\theta = \cos\theta$, $s_\theta = \sin\theta$, $c_\psi = \cos\psi$, $s_\psi = \sin\psi$。
先计算 CD:

$$CD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & c_\theta & s_\theta\\ 0 & -s_\theta & c_\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_\varphi & s_\varphi & 0\\ -s_\varphi & c_\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_\varphi & s_\varphi & 0\\ -c_\theta s_\varphi & c_\theta c_\varphi & s_\theta\\ s_\theta s_\varphi & -s_\theta c_\varphi & c_\theta \end{pmatrix}.$$

再左乘 B 得 $A=BCD$：

$$A=B(CD)=\begin{pmatrix} c_\psi & s_\psi & 0\\ -s_\psi & c_\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_\varphi & s_\varphi & 0\\ -c_\theta s_\varphi & c_\theta c_\varphi & s_\theta\\ s_\theta s_\varphi & -s_\theta c_\varphi & c_\theta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} c_\psi c_\varphi - s_\psi c_\theta s_\varphi & c_\psi s_\varphi + s_\psi c_\theta c_\varphi & s_\psi s_\theta\\ -s_\psi c_\varphi - c_\psi c_\theta s_\varphi & -s_\psi s_\varphi + c_\psi c_\theta c_\varphi & c_\psi s_\theta\\ s_\theta s_\varphi & -s_\theta c_\varphi & c_\theta\end{pmatrix}.$$

对比题目给出的 A 的各个元素：

$$\begin{aligned} a_{11}&=\cos\psi\cos\varphi-\cos\theta\sin\varphi\sin\psi=c_\psi c_\varphi-s_\psi c_\theta s_\varphi,\\ a_{12}&=\cos\psi\sin\varphi+\cos\theta\cos\varphi\sin\psi=c_\psi s_\varphi+s_\psi c_\theta c_\varphi,\\ a_{13}&=\sin\psi\sin\theta=s_\psi s_\theta.\end{aligned}$$

可见前三个系数完全吻合；其余元素也一一对应。因此 $A=BCD$ 成立。

下证 A 是正交矩阵。直接计算可知

$$B^\mathsf{T}B=\begin{pmatrix} c_\psi & -s_\psi & 0\\ s_\psi & c_\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_\psi & s_\psi & 0\\ -s_\psi & c_\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I,$$

同理 $C^\mathsf{T}C=I$, $D^\mathsf{T}D=I$，故 B,C,D 都是正交矩阵。于是

$$A^\mathsf{T}A=(BCD)^\mathsf{T}(BCD)=D^\mathsf{T}C^\mathsf{T}B^\mathsf{T}BCD=I.$$

所以 A 是正交矩阵。 □

习题 4. 设 V 是 n 维欧式空间，$n>1$，v 是 V 中的一个单位向量。设

$$A:V\to V,\qquad x\mapsto 2(x|v)v-x.$$

(i) 证明：A 是线性算子。

(ii) 证明：A 既是对称算子又是正交算子。

(iii) 计算 A 的所有特征子空间的维数。

证明. **(i) 线性性**对任意 $x, y \in V$ 及 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$，有

$$\begin{aligned} A(\lambda x+\mu y) &= 2(\lambda x+\mu y \,|\, v)v-(\lambda x+\mu y) \\ &= 2\big(\lambda(x|v)+\mu(y|v)\big)v-\lambda x-\mu y \\ &= \lambda\big(2(x|v)v-x\big)+\mu\big(2(y|v)v-y\big) \\ &= \lambda A(x)+\mu A(y). \end{aligned}$$

故 A 是线性算子。

(ii) 对称性与正交性先证对称性：对任意 $x, y \in V$，

$$\begin{aligned} (Ax \,|\, y) &= \big(2(x|v)v-x \,\big|\, y\big) = 2(x|v)(v|y)-(x|y), \\ (x \,|\, Ay) &= \big(x \,\big|\, 2(y|v)v-y\big) = 2(y|v)(x|v)-(x|y). \end{aligned}$$

二者相等，故 $(Ax|y) = (x|Ay)$，即 A 是对称算子。

再证正交性：对任意 $x, y \in V$，

$$\begin{aligned} (Ax \,|\, Ay) &= \big(2(x|v)v-x \,\big|\, 2(y|v)v-y\big) \\ &= 4(x|v)(y|v)(v|v)-2(x|v)(v|y)-2(y|v)(x|v)+(x|y) \\ &= 4(x|v)(y|v)-4(x|v)(y|v)+(x|y) \\ &= (x|y). \end{aligned}$$

因此 A 保持内积，即 A 是正交算子。

(iii) 特征子空间的维数计算 A 的特征值。由于 v 是单位向量，

$$A(v) = 2(v|v)v-v = 2v-v = v,$$

故 1 是特征值，v 是属于 1 的特征向量。若 $u \perp v$，则

$$A(u) = 2(u|v)v-u = -u,$$

故 -1 是特征值，且整个 $v^\perp$ 中的非零向量都属于特征值 -1。由于 $n > 1$，$v^\perp$ 非零。

因为 $V = \langle v\rangle \oplus v^\perp$，这两个子空间分别给出了特征值 1 和 -1 的特征子空间，且再无其他特征值。于是

$$\dim E_1 = \dim\langle v\rangle = 1, \qquad \dim E_{-1} = \dim v^\perp = n-1.$$

□

习题 5. 设

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C}).$$

列出 J_A 的所有可能性。

解. 矩阵 A 的特征值为 a, b, c。根据它们是否相等，以及 A 的次对角线元素恒为 1，A 的若尔当标准型 J_A 有以下五种可能：

1. 若 a, b, c 两两互异，则 A 可对角化，$J_A = \mathrm{diag}(a, b, c)$。
2. 若 $a = b \neq c$，则特征值 a 的代数重数为 2，几何重数为 1，有一个 2 阶若尔当块，$J_A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$。
3. 若 $a = c \neq b$, 同理特征值 a 对应一个 2 阶若尔当块, $J_A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$。
4. 若 $b = c \neq a$，特征值 b 对应一个 2 阶若尔当块，$J_A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$。
5. 若 $a = b = c$，则 A 本身就是一个 3 阶若尔当块，$J_A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$。

以上列举了 J_A 的所有可能性。 $\square$

进阶习题 1. 设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间，证明：对 $\alpha \in \mathbb{R}^n$，$\alpha_1 \in U$ 是 α 在 U 中的正交投影当且仅当对任意的 $\gamma \in U$，都有

$$\|\alpha - \alpha_1\| \leqslant \|\alpha - \gamma\|$$

证明. 1. 必要性

若 α_1 是 α 在 U 上的正交投影，则 $\alpha - \alpha_1 \perp U$，即对任意 $\gamma \in U$，

$$(\alpha - \alpha_1 | \gamma) = 0.$$

对任意 $\gamma \in U$，记 $v = \alpha_1 - \gamma \in U$，则

$$\|\alpha - \gamma\|^2 = \|(\alpha - \alpha_1) + v\|^2 = \|\alpha - \alpha_1\|^2 + \|v\|^2 + 2(\alpha - \alpha_1|v).$$

由于 $v \in U$，内积项为零，故

$$\|\alpha - \gamma\|^2 = \|\alpha - \alpha_1\|^2 + \|v\|^2 \geq \|\alpha - \alpha_1\|^2,$$

因此 $\|\alpha - \alpha_1\| \leq \|\alpha - \gamma\|$。

2. 充分性

假设对任意 $\gamma \in U$ 有 $\|\alpha - \alpha_1\| \leq \|\alpha - \gamma\|$。任取 $u \in U$，考虑函数

$$f(t) = \|\alpha - (\alpha_1 + tu)\|^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

由假设，$f(0) = \|\alpha - \alpha_1\|^2$ 是 $f(t)$ 的最小值。计算得

$$f(t) = \|(\alpha - \alpha_1) - tu\|^2 = \|\alpha - \alpha_1\|^2 - 2t(\alpha - \alpha_1|u) + t^2\|u\|^2.$$

这是关于 t 的二次函数,在 $t = 0$ 处取最小值,故导数 $f'(0) = -2(\alpha-\alpha_1|u) = 0$，从而

$$(\alpha - \alpha_1|u) = 0.$$

由 $u \in U$ 的任意性，得 $\alpha - \alpha_1 \perp U$，即 α_1 是 α 在 U 上的正交投影。

充分性另解：设 δ 是 α 在 U 上的正交投影。由上面证明的必要性，有 $\|\alpha - \delta\| \leq \|\alpha - \alpha_1\|$。已知 α_1 也满足最小距离条件，故 $\|\alpha - \alpha_1\| \leq \|\alpha - \delta\|$；因此 $\|\alpha - \alpha_1\| = \|\alpha - \delta\|$。

由于 $\alpha_1, \delta \in U$，故 $\alpha_1 - \delta \in U$。由正交投影性质，$\alpha - \delta \perp U$，从而 $(\alpha - \delta|\alpha_1 - \delta) = 0$。于是

$$\|\alpha - \alpha_1\|^2 = \|(\alpha - \delta) + (\delta - \alpha_1)\|^2 = \|\alpha - \delta\|^2 + \|\delta - \alpha_1\|^2.$$

代入 $\|\alpha - \alpha_1\| = \|\alpha - \delta\|$，得

$$\|\alpha - \delta\|^2 = \|\alpha - \delta\|^2 + \|\delta - \alpha_1\|^2,$$

因此 $\|\delta - \alpha_1\| = 0$，即 $\delta = \alpha_1$。故 α_1 就是 α 在 U 上的正交投影。

综上，命题得证。 □

进阶习题 2. 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 满足 $A^2 = E$。

1. 证明 A 的特征值只能是 ± 1；

2. 若再假设 A 正规，则证明 A 正交相似于对角矩阵 $\mathrm{diag}(I_r, -I_s)$。

证明. 1. 若 $Av = \lambda v$，则 $v = A^2 v = \lambda^2 v$。

故 $\lambda^2 = 1$，即 $\lambda = \pm 1$。

2. 正规矩阵的实正交标准型由二维旋转块 $N(\alpha, \beta)$ 与实标量块组成。若存在二维块，则其特征值为 $\alpha \pm i\beta$，满足 $(\alpha + i\beta)^2 = 1$。

虚部给出 $2\alpha\beta = 0$。若 $\beta \neq 0$，则 $\alpha = 0$，再由实部得 $-\beta^2 = 1$，矛盾。故不存在二维块。

因此所有块都是实标量块，而由第 1 问知只能是 ± 1。

故 $A \sim_o \mathrm{diag}(I_r, -I_s)$。

□

进阶习题 3. 不用标准型的方法，证明实对称矩阵的特征值都是实数。

证明. 设 A 为 n 阶实对称矩阵，即 $A^T = A$，且 A 的元素均为实数。设 λ 是 A 的一个特征值，x 为对应的非零特征向量（可能为复向量），满足 $Ax = \lambda x$。

考虑内积 $(x|Ax) = x^* Ax$，其中 x^* 表示 x 的共轭转置。一方面，

$$x^* Ax = x^*(\lambda x) = \lambda x^* x = \lambda (x|x).$$

另一方面，利用 A 的对称性（$A^T = A$）及实矩阵性质（$A^* = A^T = A$），有

$$x^* Ax = (Ax)^* x = (\lambda x)^* x = \overline{\lambda} x^* x = \overline{\lambda}(x|x).$$

因此，

$$\lambda(x|x) = \overline{\lambda}(x|x).$$

由于 $x \neq 0$，故 $(x|x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 > 0$，从而 $\lambda = \overline{\lambda}$，即 λ 为实数。

这就证明了实对称矩阵的特征值都是实数。 □

进阶习题 4. 设 V 是 n 维欧氏空间，$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 为正规算子，

1. 证明 $\ker(\mathcal{A}) = \ker(\mathcal{A}^*)$；
2. 证明对于任意实数 λ，$\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$ 也正规;
3. 证明对于任意实数 λ，有 $\ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) = \ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^2$.

证明. 1. 若 $x \in \ker(\mathcal{A})$，则 $\mathcal{A}x = 0$。于是

$$\|\mathcal{A}^*x\|^2 = (\mathcal{A}^*x|\mathcal{A}^*x) = (\mathcal{A}\mathcal{A}^*x|x).$$

由于 $\mathcal{A}$ 正规，$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$，故

$$\|\mathcal{A}^*x\|^2 = (\mathcal{A}^*\mathcal{A}x|x) = (\mathcal{A}x|\mathcal{A}x) = 0.$$

从而 $\mathcal{A}^*x = 0$，因此 $\ker(\mathcal{A}) \subseteq \ker(\mathcal{A}^*)$。

交换 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{A}^*$ 的角色可得 $\ker(\mathcal{A}^*) \subseteq \ker(\mathcal{A})$。故

$$\ker(\mathcal{A}) = \ker(\mathcal{A}^*)$$

2. 设 $\mathcal{A}$ 在 V 的一组单位正交基下对应的矩阵为 A，令 $B = A - \lambda I$，即为 $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$ 在该组基下对应的矩阵，由于 A 是正规矩阵，而数量矩阵与任意矩阵可交换，因此

$$BB^t = (A - \lambda I)(A^t - \lambda I) = (A^t - \lambda I)(A - \lambda I) = B^tB.$$

故 B 也是正规矩阵，于是 $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$ 正规。

3. 记 $\mathcal{B} = \mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$，现设 $v \in \ker(\mathcal{B}^2)$，则 $\mathcal{B}^2v = 0$，即 $\mathcal{B}(\mathcal{B}v) = 0$，因此 $\mathcal{B}v \in \ker(\mathcal{B})$。由上面两问的结论可知，$\ker(\mathcal{B}) = \ker(\mathcal{B}^*)$，故 $\mathcal{B}v \in \ker(\mathcal{B}^*)$，即 $\mathcal{B}^*(\mathcal{B}v) = 0$。

于是

$$\|\mathcal{B}v\|^2 = (\mathcal{B}v|\mathcal{B}v) = (v|\mathcal{B}^*\mathcal{B}v) = (v|0) = 0.$$

故 $\mathcal{B}v = 0$，从而 $v \in \ker(\mathcal{B})$。

因此

$$\ker(\mathcal{B}^2) \subseteq \ker(\mathcal{B}).$$

另一方面显然有

$$\ker(\mathcal{B}) \subseteq \ker(\mathcal{B}^2).$$

综上，

$$\ker(\mathcal{B}^2) = \ker(\mathcal{B}).$$

命题得证。

$\square$