第十五次作业解答

习题 1. 设实对称矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix},$$

已知 A 的特征多项式等于 $(t-1)^2(t-10)$。求正交矩阵 P 和对角矩阵 D 使得 $P^tAP = D$。

解. 特征值为 $1, 1, 10$。

对特征值 1，解 $(A-I)x = 0$，得特征子空间

$$V_1 = \{(x, y, z) : x + 2y - 2z = 0\}.$$

取基 $v_1 = (-2, 1, 0)^T$，$v_2 = (2, 0, 1)^T$。用施密特正交化：

$$u_1 = v_1 = (-2, 1, 0)^T, \qquad u_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 = (2, 0, 1)^T - \frac{-4}{5}(-2, 1, 0)^T = \frac{1}{5}(2, 4, 5)^T.$$

单位化得

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1, 0)^T, \qquad q_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}}(2, 4, 5)^T.$$

对特征值 10，解 $(A-10I)x = 0$，得特征向量可取

$$v_3 = (1, 2, -2)^T, \qquad q_3 = \frac{1}{3}(1, 2, -2)^T.$$

令

$$P = (q_1, q_2, q_3), \qquad D = \mathrm{diag}(1, 1, 10),$$

则 P 是正交矩阵且 $P^tAP = D$。 □

习题 2. 设实对称方阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其特征多项式是 $(t-1)^2(t+1)^2$。求正交矩阵 P 和对角矩阵 B 使得 $B = P^{-1}AP$。

解. 特征值 1（二重）和 -1（二重）。

对于 $\lambda = 1$，解 $(A - I)x = 0$，得

$$x_1 = x_4, \quad x_2 = x_3,$$

故可取

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1)^T, \qquad q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1,0)^T.$$

对于 $\lambda = -1$，解 $(A + I)x = 0$，得

$$x_4 = -x_1, \quad x_3 = -x_2,$$

故可取

$$q_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,-1)^T, \qquad q_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1,0)^T.$$

令

$$P = (q_1, q_2, q_3, q_4), \qquad B = \mathrm{diag}(1,1,-1,-1),$$

则 P 是正交矩阵，且 $B = P^{-1}AP$。 □

习题 3. 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 是正规矩阵，E 代表 n 阶单位阵。证明：

(i) $E + A$ 也是正规矩阵；

(ii) 如果 A 的实特征根都大于 -1，则 $\det(E + A) > 0$。

证明. (i) 因为 A 正规，所以 $A^TA = AA^T$。于是

$$(E+A)^T(E+A) = (E+A^T)(E+A) = E + A^T + A + A^TA,$$

而

$$(E+A)(E+A)^T = (E+A)(E+A^T) = E + A + A^T + AA^T.$$

由 $A^TA = AA^T$ 可知两者相等，故 $E + A$ 正规。

(ii) 实正规矩阵可正交（实）对角化于复数域上，其特征值为实数或成对共轭的复数。对每个特征值 λ，$E + A$ 的特征值为 $1 + \lambda$。

- 若 $\lambda \in \mathbb{R}$，由条件 $\lambda > -1$，得 $1 + \lambda > 0$。
- 若 $\lambda \notin \mathbb{R}$，则其共轭 $\bar{\lambda}$ 也出现，且

$$(1+\lambda)(1+\bar{\lambda}) = |1+\lambda|^2 > 0.$$

因此所有因子的乘积（成对乘积为正，实因子为正）为正，即 $\det(E+A) > 0$。 □

习题 4. (i) 设 P 是 n 阶正交矩阵。证明：$-n \leq \mathrm{tr}(P) \leq n$。

(ii) 设 $A, B \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$ 都正定。证明：如果 $A-B$ 正定，则 $B^{-1}-A^{-1}$ 正定。

证明. (i) 正交矩阵 P 的特征值 λ_i 都满足 $|\lambda_i| = 1$。因为 $\mathrm{tr}(P) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$，且 $\mathrm{tr}(P) \in \mathbb{R}$，所以

$$\mathrm{tr}(P) = \sum_{i=1}^n \Re(\lambda_i).$$

由于每个 $\Re(\lambda_i) \in [-1, 1]$，故

$$-n \leq \mathrm{tr}(P) \leq n.$$

(ii) 因为 B 正定，存在可逆实矩阵 C 使得 $B = C^T C$。由 $A - B = A - C^T C$ 正定，左乘 $(C^T)^{-1}$，右乘 C^{-1}，得 $(C^T)^{-1}AC^{-1} - I$ 也正定.

令 $X = (C^T)^{-1}AC^{-1}$，则 $X - I$ 正定，又 X 本身也正定，其正交相似于由其特征值排列成的对角矩阵 Λ，于是 $\Lambda - I$ 正定，说明 X 的特征值均大于 1，于是 X^{-1} 正定，且特征值均小于 1，从而 $I - X^{-1}$ 特征值均大于 0，从而正定。

又因为

$$B^{-1} = C^{-1}(C^T)^{-1}, \qquad A^{-1} = C^{-1}X^{-1}(C^T)^{-1},$$

所以

$$B^{-1} - A^{-1} = C^{-1}(I - X^{-1})(C^T)^{-1}.$$

由于 C^{-1} 可逆，上式表明 $B^{-1}-A^{-1}$ 合同于正定矩阵 $I-X^{-1}$，故 $B^{-1}-A^{-1}$ 正定。 □

习题 5. 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 是斜对称的。

(i) 证明：$\det(E+A) \geq 1$，其中 E 是 n 阶单位方阵。

(ii) 再设 $B \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$ 正定。证明：$\det(A+B) \geq \det(B)$。

证明. (i) 实斜对称矩阵的特征值为 0 或成对的纯虚数 $\pm i\theta$（$\theta \in \mathbb{R}$）。于是 $E+A$ 的特征值为 1（对应特征值 0）和 $1 \pm i\theta$（对应共轭对）。因此

$$\det(E+A) = \prod_{\theta}(1+i\theta)(1-i\theta) = \prod_{\theta}(1+\theta^2) \geq 1,$$

其中若没有纯虚特征值，则乘积为 1，所以 $\det(E+A) \geq 1$。

(ii) 因为 B 正定，存在实可逆矩阵 P ，使得 $P^T BP = I$, 则 $B = (P^T)^{-1}P^{-1}$。令

$$C = P^T AP.$$

则

$$C^T = (P^T AP)^T = P^T A^T P = -P^T AP = -C$$

所以 C 也是斜对称矩阵。于是

$$\begin{aligned}\det(A+B) &= \det\big((P^T)^{-1}(I+C)P^{-1}\big)\\ &= \det(P^{-1})^2 \det(I+C)\\ &= \det((P^T)^{-1}P^{-1}) \det(I+C) = \det(B)\det(I+C).\end{aligned}$$

由 (i) 知 $\det(I+C) \geq 1$，故

$$\det(A+B) \geq \det(B).$$

□

强化练习

进阶习题 1. 设 V 是域 F 上的线性空间，$\dim V = n > 2$，$A \in \mathcal{L}(V)$ 满足：V 的每一个 2 维子空间都是 A-不变的。证明：

(i) V 的每一个非零向量都是 A 的特征向量；

(ii) 对任意线性无关的向量 $x, y \in V$，有 $\lambda(x) = \lambda(y)$，进而 A 是数乘变换。

证明. (i) 用反证法。假设存在非零向量 $v \in V$，使得 v 与 Av 线性无关。由于 $\dim V \geq 3$，可取向量 $w \in V$ 满足 $w \notin \operatorname{span}\{v, Av\}$。考虑二维子空间

$$U = \operatorname{span}\{v, w\}.$$

由题设，U 是 A-不变的，故 $Av \in U$。于是存在标量 $\alpha, \beta \in F$ 使得

$$Av = \alpha v + \beta w.$$

若 $\beta \neq 0$，则 $w = \beta^{-1}(Av - \alpha v) \in \operatorname{span}\{v, Av\}$，与 $w \notin \operatorname{span}\{v, Av\}$ 矛盾。若 $\beta = 0$，则 $Av = \alpha v$，与 v, Av 线性无关矛盾。因此假设不成立，任意非零向量 v 必满足 $Av \in \operatorname{span}\{v\}$，即 v 是 A 的特征向量。

(ii) 设 $Ax = \lambda(x)x$, $Ay = \lambda(y)y$。考虑二维子空间 $\operatorname{span}\{x, y\}$，由 A-不变性，$A(x+y) \in \operatorname{span}\{x, y\}$。又由第一问结论，$x+y$ 也是特征向量，故存在 $\mu \in F$ 使得

$$A(x + y) = \mu(x + y).$$

另一方面，

$$A(x + y) = Ax + Ay = \lambda(x)x + \lambda(y)y.$$

因此

$$\lambda(x)x + \lambda(y)y = \mu x + \mu y.$$

因 x, y 线性无关，比较系数得 $\lambda(x) = \mu = \lambda(y)$。

因此所有非零向量对应的特征值均等于某一常数 λ，即对任意 $x \in V$ 有 $Ax = \lambda x$。所以 $A = \lambda I$ 是数乘变换。证毕。

□

进阶习题 2. 设 V 是域 $\mathbb{C}$ 上的 n 维线性空间, $W \subset V$ 是子空间, $\mathcal{A}$ 是 V 上线性算子满足: 对任意 $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{x} + \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{A}^2(\mathbf{x}) \in W$.

(i) 证明: $\ker(\mathcal{A}) \subset W$;

(ii) 再设 $\ker(\mathcal{A}) = W$. 证明: $\mathcal{A}^4 = \mathcal{A}$ 且 $\mathcal{A}$ 可对角化。

证明. (i) 任取 $\mathbf{x} \in \ker(\mathcal{A})$, 按定义有 $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$。进而 $\mathcal{A}^2(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathcal{A}(\mathbf{x})) = \mathcal{A}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$。由题设条件,

$$\mathbf{x} + \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{A}^2(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{x} \in W.$$

这说明 $\ker(\mathcal{A})$ 中的任意元素都属于 W，因此 $\ker(\mathcal{A}) \subset W$。

(ii) 已知 $\ker(\mathcal{A}) = W$。对任意 $\mathbf{x} \in V$, 由条件 $\mathbf{x}+\mathcal{A}\mathbf{x}+\mathcal{A}^2\mathbf{x} \in W = \ker(\mathcal{A})$, 故

$$\mathcal{A}\big(\mathbf{x} + \mathcal{A}\mathbf{x} + \mathcal{A}^2\mathbf{x}\big) = \mathbf{0}.$$

利用线性性展开得

$$\mathcal{A}\mathbf{x} + \mathcal{A}^2\mathbf{x} + \mathcal{A}^3\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (\forall \mathbf{x} \in V).$$

因此作为算子有

$$\mathcal{A} + \mathcal{A}^2 + \mathcal{A}^3 = 0, \qquad \text{即} \quad \mathcal{A}^3 = -\mathcal{A}^2 - \mathcal{A}.$$

计算 $\mathcal{A}^4$:

$$\mathcal{A}^4 = \mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^3 = \mathcal{A}(-\mathcal{A}^2 - \mathcal{A}) = -\mathcal{A}^3 - \mathcal{A}^2.$$

代入 $\mathcal{A}^3 = -\mathcal{A}^2 - \mathcal{A}$，得

$$\mathcal{A}^4 = -(-\mathcal{A}^2 - \mathcal{A}) - \mathcal{A}^2 = \mathcal{A}^2 + \mathcal{A} - \mathcal{A}^2 = \mathcal{A}.$$

故 $\mathcal{A}^4 = \mathcal{A}$。

同时我们注意到，$\mathcal{A}$ 的极小多项式 $m(x)$ 整除零化多项式

$$x^3 + x^2 + x = x(x^2 + x + 1).$$

在复数域 $\mathbb{C}$ 上，因子 x, $x-1$, x^2+x+1 两两互素，且 x^2+x+1 的根为两个不相等的非零复数根 ω 与 ω^2 ($\omega = e^{2\pi i/3}$。因此 $x^4 - x$ 无重根，其因式 $m(x)$ 也无重根。故 $\mathcal{A}$ 可对角化。

□

进阶习题 3. 设 A, B 为 n 阶实正定对称矩阵。证明:

(i) 存在正定对称矩阵 C，使得 $A = C^2$;

(ii) 乘积 AB 的特征值全为正实数，但 AB 不一定是正定对称矩阵（举出反例）。

证明. (i) 因为 A 为实对称正定矩阵，存在正交矩阵 Q 使得

$$Q^{\mathrm{T}}AQ = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n),$$

其中 $\lambda_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ 为 A 的特征值。

定义

$$\sqrt{\Lambda} = \mathrm{diag}\big(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\big),$$

并令

$$C = Q\sqrt{\Lambda}Q^{\mathrm{T}}.$$

则 C 为实对称矩阵，且其特征值 $\sqrt{\lambda_i} > 0$，故 C 正定对称。直接计算得

$$C^2 = Q\sqrt{\Lambda}Q^{\mathrm{T}}Q\sqrt{\Lambda}Q^{\mathrm{T}} = Q\Lambda Q^{\mathrm{T}} = A.$$

(ii) 由 (i) 知存在正定对称矩阵 C 使得 $A = C^2$，且 C 可逆。考虑矩阵

$$C^{-1}(AB)C = C^{-1}(C^2B)C = CBC.$$

因此 AB 相似于 CBC。注意到

$$(CBC)^{\mathrm{T}} = C^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}} = CBC,$$

故 CBC 是实对称矩阵。又对任意非零向量 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}CBC\mathbf{x} = (C\mathbf{x})^{\mathrm{T}}B(C\mathbf{x}) > 0,$$

因为 $C\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ 且 B 正定。所以 CBC 是正定对称矩阵，其特征值全为正实数。由于相似矩阵有相同的特征值，故 AB 的特征值也全为正实数。

正定矩阵通常要求对称，而 A, B 对称，但 $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = BA$ 不一定对称。例如，取

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

A 与 B 均为正定对称矩阵。计算

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 30 & 10 \end{pmatrix}.$$

因此 AB 不对称，故 AB 不是正定矩阵。

□

进阶习题 4. 设 V 是欧氏空间（有限维实内积空间），$U_1, U_2 \subseteq V$ 是子空间，$P_1, P_2 \in \mathcal{L}(V)$ 分别是到 U_1 与 U_2 上的正交投影算子，即将 V 中元素映到对应子空间的正交投影。证明：

(i) P_1 是线性算子，且是满射；

(ii) P_1 是自伴算子，即 $P_1^* = P_1$；

(iii) $P_1P_2 = 0$ 当且仅当 $U_1 \perp U_2$(即对任意 $\mathbf{u}_1 \in U_1, \mathbf{u}_2 \in U_2$，$(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_2) = 0$)。

证明. (i) **线性性：** 设 $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d$ 是 U_1 的一组单位正交基，将其扩充为 V 的一组单位正交基 $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d, \mathbf{u}_{d+1}, \ldots, \mathbf{u}_n$。根据正交投影的定义，对任意 $\mathbf{x} \in V$，存在唯一的表示

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{u}_i,$$

则 $P_1(\mathbf{x})$ 是 $\mathbf{x}$ 在 U_1 上的正交投影：

$$P_1(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{d} x_i \mathbf{u}_i.$$

由内积的性质，$x_i = (\mathbf{x}|\mathbf{u}_i)$，故

$$P_1(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{d} (\mathbf{x}|\mathbf{u}_i)\mathbf{u}_i.$$

对于任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ 及 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
P_1(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^{d}(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}|\mathbf{u}_i)\,\mathbf{u}_i \\
&= \sum_{i=1}^{d}\big(\alpha(\mathbf{x}|\mathbf{u}_i)+\beta(\mathbf{y}|\mathbf{u}_i)\big)\,\mathbf{u}_i \\
&= \alpha\sum_{i=1}^{d}(\mathbf{x}|\mathbf{u}_i)\mathbf{u}_i+\beta\sum_{i=1}^{d}(\mathbf{y}|\mathbf{u}_i)\mathbf{u}_i \\
&= \alpha P_1(\mathbf{x})+\beta P_1(\mathbf{y}).
\end{aligned}
$$

所以 P_1 是线性算子。

满射性: 任取 $\mathbf{u} \in U_1$, 因为 $U_1 = \mathrm{span}\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d\}$, 可设 $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{d} c_i\mathbf{u}_i$。计算得

$$
P_1(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{d}(\sum_{j=1}^{d} c_j\mathbf{u}_j|\mathbf{u}_i)\mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{d} c_i\mathbf{u}_i = \mathbf{u}.
$$

因此 $\mathbf{u} \in \mathrm{Im}(P_1)$，即 $U_1 \subseteq \mathrm{Im}(P_1)$。又由定义 $P_1(\mathbf{x}) \in U_1$ 对一切 $\mathbf{x}$ 成立，故 $\mathrm{Im}(P_1) \subseteq U_1$。综上，$\mathrm{Im}(P_1) = U_1$，即 P_1 是满射到 U_1 上。

(ii) 对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$，利用 P_1 的表达式 $P_1(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{d}(\mathbf{x}|\mathbf{u}_i)\mathbf{u}_i$，

$$
\begin{aligned}
(P_1(\mathbf{x})|\mathbf{y}) &= \Big(\sum_{i=1}^{d}(\mathbf{x}|\mathbf{u}_i)\mathbf{u}_i|\mathbf{y}\Big) = \sum_{i=1}^{d}(\mathbf{x}|\mathbf{u}_i)(\mathbf{u}_i|\mathbf{y}) \\
&= \sum_{i=1}^{d}(\mathbf{y}|\mathbf{u}_i)(\mathbf{x}|\mathbf{u}_i) = \Big(\mathbf{x}|\sum_{i=1}^{d}(\mathbf{y}|\mathbf{u}_i)\mathbf{u}_i\Big) = (\mathbf{x}|P_1(\mathbf{y})).
\end{aligned}
$$

由伴随算子的定义，上式表明 $P_1^* = P_1$，故 P_1 是自伴算子。

(iii) **(⇐)** 设 $U_1 \perp U_2$。任取 $\mathbf{x} \in V$，有 $P_2\mathbf{x} \in U_2$。由正交性 $U_2 \subseteq U_1^{\perp} = \ker(P_1)$，故

$$
P_1(P_2\mathbf{x}) = \mathbf{0}.
$$

由 $\mathbf{x}$ 的任意性得 $P_1P_2 = 0$。

(⇒) 设 $P_1P_2 = 0$。任取 $\mathbf{u}_1 \in U_1$，$\mathbf{u}_2 \in U_2$，则 $\mathbf{u}_1 = P_1\mathbf{u}_1$，$\mathbf{u}_2 = P_2\mathbf{u}_2$。考虑内积:

$$
(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_2) = (P_1\mathbf{u}_1|P_2\mathbf{u}_2) = (\mathbf{u}_1|P_1^*P_2\mathbf{u}_2).
$$

由自伴性 $P_1^* = P_1$，结合假设 $P_1P_2 = 0$ 得

$$(\mathbf{u}_1|P_1P_2\mathbf{u}_2) = (\mathbf{u}_1|\mathbf{0}) = 0.$$

故任意 $\mathbf{u}_1$ 与 $\mathbf{u}_2$ 正交，即 $U_1 \perp U_2$。

综上，$P_1P_2 = 0$ 当且仅当 U_1 与 U_2 相互正交。

$\square$