2026年3月23日 星期一　14:42

习题课 3

1 设 $A\in F^{m\times s}$，定义 $L_A: F^{s\times n}\to F^{m\times n}$，$X\to AX$

验证 L_A 是线性映射，且 L_A 是单射当且仅当 A 列满秩.

证明:

① 验证线性映射：设 $\forall X_1,X_2\in F^{s\times n}$，$k\in F$.

$L_A(X_1+X_2)=A(X_1+X_2)=AX_1+AX_2=L_A(X_1)+L_A(X_2)$

$L_A(kX_1)=A(kX_1)=kAX_1=kL_A(X_1)$

故 L_A 为线性映射

② L_A 单射 $\Longleftrightarrow$ A 列满秩

$\Longrightarrow$：若 A 不是列满秩，即 $\operatorname{rank}A<s$，故 $\exists\,\alpha\in F^{s\times 1}$ s.t $\alpha\neq 0$，$A\alpha=0$，将 α 扩充成矩阵 $X=(\vec\alpha,\underbrace{\vec 0,\vec 0,\cdots,\vec 0}_{n-1\text{列}})$

则 $AX=0$ 但 $X\neq 0$，与 L_A 单射矛盾.

$\Longleftarrow$：若 A 列满秩，则 $A\alpha=0\Longrightarrow\alpha=0$ 对 $\forall\,\alpha\in F^{s\times 1}$ 成立，

故 $AX=0\Longrightarrow X=0$ 对 $\forall\,X\in F^{s\times n}$ 成立，即 L_A 单.

2．定义：$\Delta_x: F[x]\to F[x]$，$f(x)\to f(x+1)-f(x)$

验证 Δ_x 为线性映射且不为单射.

证明：① 对 $\forall\,f,g\in F[x]$，$k\in F$

$\Delta_x(f+g)=(f+g)(x+1)-(f+g)(x)=[f(x+1)-f(x)]+[g(x+1)-g(x)]$
$=\Delta_x f+\Delta_x g$

$\Delta_x(kf)=kf(x+1)-kf(x)=k\Delta_x f$

故 Δ_x 为线性映射

② 取 $f_1(x)=c_1$，$f_2(x)=c_2$，$c_1,c_2\in F$ 且 $c_1\neq c_2$.

则 $f_1(x)\neq f_2(x)$，但 $\Delta_x f_1=\Delta_x f_2=0$，故不为单.

注：证明不单请举反例．且需保证 $f(x)\in F[x]$，不要举 $f(x)=\sin 2\pi x$ 这种例子.

3．设 V 是 F 上的线性空间，$V_1,\cdots,V_k$ 是 V 的子空间且

$V=V_1\oplus\cdots\oplus V_k$.

令 $\pi_1: V\to V$ 为投影映射．证明：π_1 为线性映射，$\pi_1^2=\pi_1$ 且 $\ker(\pi_1)=V_2+\cdots+V_k$.

证明：设 $\forall\,\alpha,\beta\in V$，$f\in F$，$\exists\,a_i,b_i\in V_i$ $(1\le i\le k)$，s.t

① $\alpha=a_1+\cdots+a_k$，$\beta=b_1+\cdots+b_k$，$\pi_1(\alpha)=a_1$，$\pi_1(\beta)=b_1$

$\pi_1(\alpha+\beta)=\pi_1((a_1+b_1)+\cdots+(a_k+b_k))=a_1+b_1=\pi_1(\alpha)+\pi_1(\beta)$.

$\pi_1(f\alpha)=\pi_1(fa_1+\cdots+fa_k)=fa_1=f\pi_1(\alpha)$．故 π_1 为线性映射.

② 对 $\forall\,\alpha\in V$，$\pi_1(\alpha)\in V_1$，故 $\pi_1(\pi_1(\alpha))=\pi_1(\alpha)$，即 $\pi_1^2=\pi_1$.

③ 设 $\alpha\in\ker\pi_1$，则 $\pi_1(\alpha)=0$，故 $\exists\,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ $(\alpha_i\in V_i)$

$\alpha=\alpha_2+\cdots+\alpha_k\in V_2+\cdots+V_k$.

另一方面，若 $\alpha\in V_2+\cdots+V_k$，则 $\pi_1(\alpha)=0$，$\alpha\in\ker\pi_1$.

综上 $\ker\pi_1=V_2+\cdots+V_k$.

4．设 V 是 R 上 n 阶斜对称矩阵集合

(i) 验证：V 是 $M_n(R)$ 的子空间

(ii) 求 V 的一组基并计算 $\dim(V)$.

(i) 设 $\forall\,A,B\in V$，$r\in R$.

则 $(A+B)^T=A^T+B^T=-A-B=-(A+B)$.

$(rA)^T=rA^T=-rA$

故 $A+B\in V$，$rA\in V$，V 是 $M_n(R)$ 子空间.

(ii) 设 $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}\in V$，则 $\begin{cases}a_{ii}=-a_{ii} & (1\le i\le n)\\ a_{ij}=-a_{ji} & (1\le i<j\le n)\end{cases}$

$$A=\begin{pmatrix}0&-a_{12}&-a_{13}&\cdots&-a_{1n}\\ a_{12}&0&-a_{23}&\cdots&-a_{2n}\\ a_{13}&a_{23}&\ddots&&\vdots\\ \vdots&\vdots&&\ddots&-a_{n-1,n}\\ a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{n-1,n}&0\end{pmatrix}$$

，用 E_{ij} 表示 $a_{ij}=1$，其余均为 0 的矩阵，

则 $A=\sum\limits_{1\le j<i\le n}a_{ij}(E_{ij}-E_{ji})$

故 $E_{ij}-E_{ji}$ $(1\le j<i\le n)$ 为 V 的一组生成元

另一方面，若 $\sum\limits_{1\le j<i\le n}a_{ij}(E_{ij}-E_{ji})=0$，即 $A=0\Longrightarrow a_{ij}=0$ $(1\le j<i\le n)$

故这 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个矩阵线性无关.

综上所述，V 的一组基为 $E_{ij}-E_{ji}$ $(1\le j<i\le n)$，$\dim V=\frac{n(n-1)}{2}$

5．$V=Q^2$，$\{e_1,e_2\}$ 为标准基，令 $v_1=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$，$v_2=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

(i) 验证 v_1,v_2 为 V 一组基

(ii) 求 $(e_1,e_2)\to(v_1,v_2)$ 转换矩阵

(iii) 求 $(v_1,v_2)\to(e_1,e_2)$ 转换矩阵

(iv) 设 $x=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ 求 x 在 v_1,v_2 下坐标.

解：(i) $\det(v_1,v_2)=\begin{vmatrix}1&3\\3&1\end{vmatrix}=-8\neq 0$．故 v_1,v_2 为 V 一组基

(ii) $(v_1,v_2)=(e_1,e_2)P\Longrightarrow P=\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix}$

(iii) $P^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac18&\frac38\\ \frac38&-\frac18\end{pmatrix}$ （转换矩阵即为 P^{-1}）

(iv) $x=(e_1,e_2)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=(v_1,v_2)P^{-1}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=(v_1,v_2)\begin{pmatrix}-\frac12\\ \frac12\end{pmatrix}$

6．设 V 是 F 上 n 维线性空间，$\{v_1\cdots v_n\}$ 和 $\{w_1\cdots w_n\}$ 是 V 的两组基，$(w_1,\cdots,w_n)=(v_1,\cdots,v_n)\cdot A$．令

$U=\{u\in V\mid u$ 在 $\{w_1\cdots w_n\}$ 和 $\{v_1\cdots v_n\}$ 下坐标相同$\}$.

(i) 验证 U 是 V 的子空间

(ii) 证明：$\dim U=n-\operatorname{rank}(E-A)$.

证：设 u 在 $\{v_1\cdots v_n\}$ 下坐标为 α，则在 $\{w_1\cdots w_n\}$ 下坐标为 $A^{-1}\alpha$

故 $u\in U\Longleftrightarrow\alpha=A^{-1}\alpha\Longleftrightarrow(E-A)\alpha=0\Longleftrightarrow\alpha\in\ker(E-A)$.

故 U 与 $\ker(U-A)$ 同构．为子空间（详见讲义最后）

且由对偶定理 $\dim U=n-\operatorname{rank}(E-A)$.

补充

1．设 F 是特征不为 2 的域，$V=M_n(F)$，V_1 为全体斜对称矩阵集合，V_2 为全体对称矩阵集合．求证：$V=V_1\oplus V_2$

证明：由作业，$\dim V_1=\frac{n(n-1)}{2}$，类似可得 $\dim V_2=\frac{n(n+1)}{2}$.

由于 $\dim V_1+\dim V_2=\dim V$，我们只需证直和.

设 $A\in M_n(F)$．$A\in V_1\cap V_2$．令 $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$

则 $\begin{cases}a_{ii}=0 & (1\le i\le n)\\ a_{ij}=a_{ji} & (1\le i<j\le n)\\ a_{ij}=-a_{ji}\end{cases}\Longrightarrow a_{ij}=0$ $(1\le i,j\le n)$ 即 $A=0$

由此 $\dim(V_1+V_2)=\dim(V_1\oplus V_2)=\dim V_1+\dim V_2=\dim V$

$V_1+V_2=V$

2．设 V 为 F 上 n 维线性空间，$\{v_1\cdots v_n\}$ 和 $\{w_1,\cdots,w_n\}$ 为 V 的两组基，$\{v_1\cdots v_n\}\to\{w_1\cdots w_n\}$ 转移矩阵为 P，若 $f: V\to V$ 为线性映射，且 f 在 $\{v_1\cdots v_n\}$ 下矩阵为 A．求 f 在 $\{w_1\cdots w_n\}$ 下的矩阵.

解：由题意：$\begin{cases}(w_1\cdots w_n)=(v_1\cdots v_n)P\\ f(v_1\cdots v_n)=(v_1\cdots v_n)A\end{cases}$

设 $f(w_1\cdots w_n)=(w_1\cdots w_n)\cdot T$

则 $f(w_1\cdots w_n)=f((v_1\cdots v_n)P)=f(v_1\cdots v_n)\cdot P=(v_1\cdots v_n)AP$

$(w_1\cdots w_n)T=(v_1\cdots v_n)PT$

故 $AP=PT$，$T=P^{-1}AP$

3．设 $A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\2&1&-2\\-3&-2&1\end{pmatrix}$，求可逆矩阵 P，s.t P^TAP 为 A 的规范形式

解：$(A\mid I_3)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-3&1&&\\2&1&-2&&1&\\-3&-2&1&&&1\end{array}\right)\xrightarrow{-2(1)+(2)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-3&1&&\\0&-3&4&-2&1&\\-3&4&1&&&1\end{array}\right)$

$\xrightarrow{3(1)+(3)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&-3&4&-2&1&0\\0&4&-8&3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{\frac43(2)+(3)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&-3&0&-2&1&0\\0&0&-\frac83&\frac13&\frac43&1\end{array}\right)$

$\xrightarrow{\frac{1}{\sqrt3}(2),\ \sqrt{\frac38}(3)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&&&1&0&0\\&-1&&-\frac{2}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}&0\\&&-1&\frac{1}{2\sqrt6}&\sqrt{\frac23}&\frac{\sqrt3}{2\sqrt2}\end{array}\right)$　$P=\begin{pmatrix}1&-\frac{2}{\sqrt3}&\frac{1}{2\sqrt6}\\0&\frac{1}{\sqrt3}&\sqrt{\frac23}\\0&0&\frac{\sqrt3}{2\sqrt2}\end{pmatrix}$

$P^TAP=\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}$

Ex．$A=\begin{pmatrix}0&\frac12&\frac12\\ \frac12&0&\frac12\\ \frac12&\frac12&0\end{pmatrix}$　（$P=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$，$P^TAP=\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}$）

4．设 $T: V\to V$ 线性映射，$T^2=0$

(1) 证明 $\operatorname{Im}(T)\subseteq\ker(T)$

(2) 证明 $\operatorname{rank}(T)\le\frac12\dim(V)$

(3) 构造一个例子 s.t (2) 中等号成立.

解：(1) 设 $\alpha\in\operatorname{Im}(T)$，则 $\exists\,\beta\in T$，s.t $\alpha=T(\beta)$．故 $T(\alpha)=T^2(\beta)=0$

$\alpha\in\ker(T)$ 即 $\operatorname{Im}(T)\subseteq\ker(T)$

(2) $\dim(\ker(T))+\dim(\operatorname{Im}(T))=\dim V$

$\operatorname{Im}(T)\subseteq\ker T$ 故 $\operatorname{rank}T=\dim(\operatorname{Im}(T))\le\dim(\ker T)$

$\Longrightarrow\operatorname{rank}T\le\frac12\dim V$

(3) 令 V 为 R 上 $2n$ 维线性空间 $e_1,e_2\cdots e_{2n}$ 为标准基.

$f((x_1\cdots x_n\ x_{n+1}\cdots x_{2n}))=(x_{n+1}\cdots x_{2n},0\cdots 0)$

即 $f(e_1\cdots e_{2n})=(e_1\cdots e_{2n})\begin{pmatrix}0&I_n\\0&0\end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix}0&I_n\\0&0\end{pmatrix}$，$A^2=0$

作业 6．令 $\varphi: \ker(E-A)\to U$

$\alpha=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\to(v_1,\cdots,v_n)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_nv_n$

由上面的讨论知 φ 是良定义的.

单：$\forall\,\alpha\in\ker(E-A)$，若 $\varphi(\alpha)=(v_1\cdots v_n)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=0$

由于 $(v_1,\cdots,v_n)$ 为基，故 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$

满：设 $\forall\,\beta\in U$，β 在 $(v_1,\cdots,v_n)$ 下坐标为 $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$，

则 $\varphi\left(\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\right)=(v_1\cdots v_n)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$，故 $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$ 为原像.

同态：$\forall\,\alpha,\beta\in\ker(E-A)$，$f_1,f_2\in F$，$\alpha=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$

$\varphi(f_1\alpha+f_2\beta)=(v_1\cdots v_n)\begin{pmatrix}f_1\alpha_1+f_2\beta_1\\ \vdots\\ f_1\alpha_n+f_2\beta_n\end{pmatrix}$

$=f_1(v_1,\cdots,v_n)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}+f_2\cdot(v_1\cdots v_n)\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$

综上所述，φ 为 $\ker(E-A)$ 到 U 的同构.