

第四次作业解答

习题 1. 设 \mathbb{Z}_3 的标准基是 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$,

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_2 \quad \text{and} \quad \mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.$$

(i) 验证: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 是 \mathbb{Z}_3^3 的一组基. (ii) 设 $\mathbf{v} = (2, 2, 1)^t$. 计算 \mathbf{v} 在 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 下的坐标. (iii) 证明: $\mathbf{v} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle$. 把 \mathbf{v} 看作 $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle$ 中的元素. 求它在 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3$ 下的坐标.

解. (i) 将向量按列排成矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

计算行列式 (在 \mathbb{Z}_3 中):

$$\det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 + 0 = 1 \neq 0.$$

故向量组线性无关, 且维数为 3, 构成一组基。

(ii) 设 $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3$, 即

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

代入 $x_3 = 1$ 得 $x_1 + 1 = 2 \Rightarrow x_1 = 1$, 再由 $x_1 + x_2 + 1 = 2 \Rightarrow 1 + x_2 + 1 = 2 \Rightarrow x_2 = 0$. 故坐标为 $(1, 0, 1)^t$.

(iii) 由 (ii) 知 $\mathbf{v} = 1 \cdot \mathbf{v}_1 + 0 \cdot \mathbf{v}_2 + 1 \cdot \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3$, 故 \mathbf{v} 在 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3$ 张成的子空间中, 且坐标为 $(1, 1)^t$. \square

习题 2. 设 V 是域 F 上的 n 维线性空间, U 是 V 的子空间, $d = \dim(U) > 0$ 且 $0 < d < n$. 证明: 存在 $f_1, \dots, f_{n-d} \in V^*$ 使得 $U = \ker(f_1) \cap \dots \cap \ker(f_{n-d})$.

证明. 取 U 的一组基 $\alpha_1, \dots, \alpha_d$, 扩充为 V 的一组基 $\alpha_1, \dots, \alpha_d, \alpha_{d+1}, \dots, \alpha_n$. 设其对偶基为 g_1, \dots, g_n , 即

$$g_i(\alpha_j) = \delta_{ij} \quad \text{对任意的 } i, j = 1, 2, \dots, n.$$

则对于 $i = 1, \dots, n-d$, 令 $f_i = g_{d+i}$, 则 f_i 在 $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ 上为 0, 且 $f_i(\alpha_{d+j}) = \delta_{ij}$. 于是

$$\ker f_i = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_d, \alpha_{d+1}, \dots, \alpha_{d+i-1}, \alpha_{d+i+1}, \dots, \alpha_n \rangle.$$

那么在基 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 下的向量 $v = (v_1, \dots, v_n) \in \ker f_i$ 当且仅当 $v_{d+i} = 0$. $v = (v_1, \dots, v_n)$ 属于所有 $\ker f_i$ 当且仅当每个 α_{d+i} 为零 (因为每个 f_i 恰好提取 α_{d+i} 的坐标), 从而它只能是 $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ 的线性组合. 于是

$$\bigcap_{i=1}^{n-d} \ker f_i = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_d \rangle = U.$$

□

习题 3. 设 $f, g \in V^*$. 定义 $\phi(v, w) = f(v)g(w)$. (i) 验证 ϕ 是 V 上的双线性型. (ii) 证明: $\text{rank}(\phi) \leq 1$.

解. (i) 对任意 $v_1, v_2, w \in V$, $\lambda \in F$, 有

$$\begin{aligned} \phi(v_1 + v_2, w) &= f(v_1 + v_2)g(w) \\ &= (f(v_1) + f(v_2))g(w) \\ &= f(v_1)g(w) + f(v_2)g(w) \\ &= \phi(v_1, w) + \phi(v_2, w) \\ \phi(\lambda v, w) &= f(\lambda v)g(w) = \lambda f(v)g(w) = \lambda \phi(v, w) \end{aligned}$$

同理关于第二个变量也是线性的, 故 ϕ 是双线性型。

(ii) 取 V 的一组基为 e_1, \dots, e_n , 设 f 在该基下的坐标向量为 $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$, g 的坐标向量为 $\beta = (b_1, \dots, b_n)$, 即 $f(e_i) = a_i$, $g(e_i) = b_i$. 则 ϕ 在基下的矩阵 M 满足 $M_{ij} = \phi(e_i, e_j) = a_i b_j$, 即 $M = \alpha \beta^t$. 这是一个秩不超过 1 的矩阵, 故 $\text{rank}(\phi) \leq 1$. □

习题 4. 设 \mathbb{Q}^3 上的双线性型由

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2$$

给出, 其中 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^t$ 和 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^t$. (i) 计算 f 在标准基 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 下的矩阵并求 $\text{rank}(f)$. (ii) 说明 f 是对称双线性型.

解. (i) 记 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i,j} a_{ij}x_iy_j$, 则 a_{ij} 为 y_j 的系数。逐项分析:

$$2x_2y_2 \Rightarrow a_{22} = 2,$$

$$2x_3y_3 \Rightarrow a_{33} = 2,$$

$$x_1y_2 \Rightarrow a_{12} = 1,$$

$$x_2y_1 \Rightarrow a_{21} = 1,$$

$$x_1y_3 \Rightarrow a_{13} = 1,$$

$$x_3y_1 \Rightarrow a_{31} = 1,$$

$$2x_2y_3 \Rightarrow a_{23} = 2,$$

$$2x_3y_2 \Rightarrow a_{32} = 2.$$

其余 $a_{ij} = 0$ 。故矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

计算行列式: $\det A = 0 \cdot (2 \cdot 2 - 2 \cdot 2) - 1 \cdot (1 \cdot 2 - 2 \cdot 1) + 1 \cdot (1 \cdot 2 - 2 \cdot 1) = 0 - 1 \cdot (2 - 2) + 1 \cdot (2 - 2) = 0$, 故秩小于 3。观察第二、三行成比例, 实际上第二行等于第三行, 且第一行与它们线性无关 (因为第一行不是它们的倍数), 故 $\text{rank}(A) = 2$ 。

(ii) 显然 A 是对称矩阵, 故 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^t A \mathbf{y}$ 是对称双线性型。 \square

习题 5. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. 计算 $P \in GL_2(\mathbb{R})$ 和对角矩阵 D 使得 $P^t A P = D$.

解. 方法一: 设 f 是 \mathbb{R}^2 上的对称双线性型, 在标准基 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 下的矩阵为 A , 即

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2.$$

我们按以下步骤寻找一组基使得 f 的矩阵为对角形。

步骤 1. 选取 ϵ_1 使得 $f(\epsilon_1, \epsilon_1) \neq 0$ 。取 $\epsilon_1 = \mathbf{e}_1$, 则

$$f(\epsilon_1, \epsilon_1) = f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = 1 \neq 0.$$

步骤 2. 确定子空间 $W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid f(\mathbf{x}, \epsilon_1) = 0\}$ 。计算

$$f(\mathbf{x}, \epsilon_1) = (x_1, x_2)A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 + 2x_2.$$

方程 $x_1 + 2x_2 = 0$ 的解空间为

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} -2t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\},$$

取一组基 $\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。

步骤 3. 考虑限制 $g = f|_{W \times W}$ 。计算

$$g(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1) = f(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1) = (-2)^2 + 2 \cdot (-2) \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot (-2) + 1^2 = 4 - 4 - 4 + 1 = -3 \neq 0.$$

于是 g 在 W 的基 \mathbf{w}_1 下的矩阵就是 (-3) ，已经是对角形。

步骤 4. 令 $\epsilon_2 = \mathbf{w}_1$ ，则 ϵ_1, ϵ_2 构成 \mathbb{R}^2 的一组基。由构造知

$$f(\epsilon_1, \epsilon_2) = f(\epsilon_1, \mathbf{w}_1) = 0, \quad f(\epsilon_2, \epsilon_1) = 0,$$

且

$$f(\epsilon_1, \epsilon_1) = 1, \quad f(\epsilon_2, \epsilon_2) = -3.$$

因此， f 在基 ϵ_1, ϵ_2 下的矩阵为 $\text{diag}(1, -3)$ 。

步骤 5. 求从标准基到 ϵ_1, ϵ_2 的过渡矩阵。由

$$\epsilon_1 = \mathbf{e}_1, \quad \epsilon_2 = -2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,$$

得

$$(\epsilon_1, \epsilon_2) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

取 $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ，则

$$P^t A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = D.$$

故所求矩阵为 $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \text{diag}(1, -3)$ 。

方法二: 取二次型 $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$ 。配方法:

$$x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + 2x_2)^2 - 3x_2^2.$$

令 $y_1 = x_1 + 2x_2$, $y_2 = x_2$, 则 $x_1 = y_1 - 2y_2$, $x_2 = y_2$, 即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

取 $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 计算:

$$P^tAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

先计算中间乘右边:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

再左乘:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

故 $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, 且 P 可逆。 □

习题 6. 设 $n > 1$ 且 F 为域, F^n 上的两个子空间是

$$U_1 = \{(x_1, \dots, x_n)^t \mid x_1 + \dots + x_n = 0\},$$

$$U_2 = \{(x_1, \dots, x_n)^t \mid x_1 = \dots = x_n\}.$$

(i) 计算 $\dim(U_1)$ 和 $\dim(U_2)$. (ii) 证明: 当 F 的特征不等于 n 时, $U_1 + U_2$ 是直和.

解. (i) U_1 是 F^n 中一个非零线性方程的解空间, 故 $\dim U_1 = n - 1$. U_2 由所有分量相等的向量构成, 即 $\{(c, c, \dots, c)^t \mid c \in F\}$, 故 $\dim U_2 = 1$.

(ii) 只需证明 $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. 设 $\mathbf{v} = (c, c, \dots, c)^t \in U_2$, 若 $\mathbf{v} \in U_1$, 则 $nc = 0$. 当特征不等于 n 时, $n \neq 0$ 在 F 中, 故 $c = 0$, 从而 $\mathbf{v} = 0$. 因此交为零, 且 $U_1 + U_2$ 是直和 (实际上 $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 = n$, 故 $U_1 \oplus U_2 = F^n$). □

商空间

本节中, V 是域 F 上的线性空间, U 是 V 的一个子空间。我们将 U “压缩成零”, 从而构造一个新的线性空间 V/U , 称为 V 关于 U 的商空间。

陪集与商集

在 V 上定义关系 \sim : 对 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$,

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \iff \mathbf{x} - \mathbf{y} \in U.$$

容易验证 \sim 是等价关系 (自反、对称、传递)。 \mathbf{x} 所在的等价类记为

$$[\mathbf{x}] = \mathbf{x} + U = \{\mathbf{x} + \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in U\},$$

称为 \mathbf{x} 关于 U 的**陪集**。所有陪集组成的集合记为

$$V/U = \{\mathbf{x} + U \mid \mathbf{x} \in V\}.$$

V/U 称为 V 关于 U 的**商集**。

例子 1. 取 $V = \mathbb{R}^2$, $U = \{(t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$ (x 轴)。则

$$(x_1, x_2) + U = \{(x_1 + t, x_2) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

每个陪集是一条水平直线 (纵坐标为 x_2)。商集 V/U 就是所有水平直线的集合, 与 \mathbb{R} 一一对应。

商空间的线性结构

在 V/U 上定义加法和数乘:

$$(\mathbf{x} + U) + (\mathbf{y} + U) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + U, \quad \lambda(\mathbf{x} + U) = (\lambda\mathbf{x}) + U, \quad \lambda \in F.$$

需要验证定义是良定的 (与代表元选取无关)。例如, 若 $\mathbf{x} + U = \mathbf{x}' + U$, 则 $\mathbf{x} - \mathbf{x}' \in U$, 那么

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - (\mathbf{x}' + \mathbf{y}) = \mathbf{x} - \mathbf{x}' \in U,$$

所以 $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + U = (\mathbf{x}' + \mathbf{y}) + U$, 加法良定。数乘类似。

可以验证 V/U 在这些运算下构成 F 上的线性空间, 零元为 $0 + U = U$ 。我们称 V/U 是 V 对于 U 的**商空间**。

维数公式

商空间 V/U 的维数可以由 V 和 U 的维数确定，我们有如下的维数公式：

定理 1. 设 $\dim V = n$, $\dim U = d$. 则 $\dim(V/U) = n - d$.

证明. 取 U 的一组基 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d$, 扩充为 V 的一组基 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d, \mathbf{v}_{d+1}, \dots, \mathbf{v}_n$. 我们证明 $\mathbf{v}_{d+1} + U, \dots, \mathbf{v}_n + U$ 是 V/U 的一组基。

首先, 对任意 $\mathbf{x} \in V$, 可写 $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^d a_i \mathbf{u}_i + \sum_{j=d+1}^n b_j \mathbf{v}_j$, 则

$$\mathbf{x} + U = \sum_{j=d+1}^n b_j (\mathbf{v}_j + U),$$

所以这些陪集张成 V/U 。

其次, 设 $\sum_{j=d+1}^n c_j (\mathbf{v}_j + U) = 0 + U$, 即 $\sum_{j=d+1}^n c_j \mathbf{v}_j \in U$. 于是存在 c_1, \dots, c_d 使 $\sum_{j=d+1}^n c_j \mathbf{v}_j = \sum_{i=1}^d c_i \mathbf{u}_i$, 移项得 $\sum_{i=1}^d c_i \mathbf{u}_i - \sum_{j=d+1}^n c_j \mathbf{v}_j = 0$. 由 $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j$ 线性无关得所有系数为零, 特别地 $c_{d+1} = \dots = c_n = 0$. 因此 $\mathbf{v}_{d+1} + U, \dots, \mathbf{v}_n + U$ 线性无关. 故它们是基, 维数为 $n - d$. \square

定义 1. 映射 $\pi : V \rightarrow V/U$, $\pi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + U$ 是线性满射, 称为**典范映射**。

显然 $\ker \pi = U$ 。

定理 2 (同态基本定理). 设 V 和 W 是域 F 上的线性空间, $T : V \rightarrow W$ 是线性映射. 则存在唯一的线性映射 $\tilde{T} : V/\ker T \rightarrow \text{im } T$ 使得 $T = \tilde{T} \circ \pi$, 其中 $\pi : V \rightarrow V/\ker T$ 是典范映射. 而且 \tilde{T} 是线性同构. 即

$$V/\ker T \cong \text{im } T.$$

特别地, 如果 T 是满射, 则 $V/\ker T \cong W$ 。

证明. 记 $U = \ker T$. 定义 $\tilde{T} : V/U \rightarrow \text{im } T$ 为

$$\tilde{T}(\mathbf{v} + U) = T(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

首先验证 \tilde{T} 是良定义的: 若 $\mathbf{v} + U = \mathbf{v}' + U$, 则 $\mathbf{v} - \mathbf{v}' \in U = \ker T$, 故 $T(\mathbf{v} - \mathbf{v}') = 0$, 即 $T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v}')$. 因此 \tilde{T} 的值不依赖于代表元的选择。

线性性: 对任意 $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V, \lambda \in F$,

$$\begin{aligned}\tilde{T}((\mathbf{v} + U) + (\mathbf{w} + U)) &= \tilde{T}((\mathbf{v} + \mathbf{w}) + U) \\ &= T(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \\ &= T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{w}) \\ &= \tilde{T}(\mathbf{v} + U) + \tilde{T}(\mathbf{w} + U) \\ \tilde{T}(\lambda(\mathbf{v} + U)) &= \tilde{T}(\lambda\mathbf{v} + U) = T(\lambda\mathbf{v}) = \lambda T(\mathbf{v}) = \lambda\tilde{T}(\mathbf{v} + U).\end{aligned}$$

所以 \tilde{T} 是线性映射。

满射性: 对任意 $\mathbf{w} \in \text{im } T$, 存在 $\mathbf{v} \in V$ 使 $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$, 则 $\tilde{T}(\mathbf{v} + U) = \mathbf{w}$ 。

单射性: 设 $\tilde{T}(\mathbf{v} + U) = 0$, 即 $T(\mathbf{v}) = 0$, 故 $\mathbf{v} \in \ker T = U$, 从而 $\mathbf{v} + U = 0 + U$ 。因此 $\ker \tilde{T} = \{0\}$, \tilde{T} 是单射。

综上, \tilde{T} 是线性同构, 即 $V/\ker T \cong \text{im } T$ 。 \square

与补子空间的关系

设 V 是域 F 上的线性空间, U 是 V 的子空间。如果存在 V 的子空间 W 使得

$$V = U \oplus W,$$

即 $V = U + W$ 且 $U \cap W = \{0\}$, 则称 W 是 U 在 V 中的一个补子空间 (或补空间)。

换言之, 每个向量 $\mathbf{v} \in V$ 可以唯一地写成 $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, 其中 $\mathbf{u} \in U, \mathbf{w} \in W$ 。

定理 3. 域 F 上线性空间 V 的任意子空间 W 都有补空间。

证明. 考虑商空间 V/W 的一组基 $\hat{S} = \{\alpha_i + W \mid \alpha_i \in V, i \in I\}$, 其中 I 是指标集, 则 $S = \{\alpha_i \mid i \in I\}$ 是 V 中线性无关的向量集, 取 U 为 S 生成的子空间, 即

$$U = \left\{ \sum_{j=1}^r k_j \alpha_{i_j} \mid \alpha_{i_j} \in S, k_j \in F, j = 1, 2, \dots, r; r \in \mathbb{N}^* \right\}$$

于是 S 是 U 的一组基, 我们来证明 U 就是 W 在 V 中的补空间。

任取 $\alpha \in V$, 由于 \hat{S} 是 V/W 的一组基, 因此存在 $l_j \in F$, 使得

$$\alpha + W = \sum_{j=1}^t l_j (\alpha_{i_j} + W) = \left(\sum_{j=1}^t l_j \alpha_{i_j} \right) + W$$

从而 $\alpha - \sum_{j=1}^t l_j \alpha_{i_j} \in W$ 。记 $\gamma = \sum_{j=1}^t l_j \alpha_{i_j}$ ，则 $\gamma \in U$ ，且 $\alpha - \gamma \in W$ 。于是存在 $\delta \in W$ ，使得 $\alpha - \gamma = \delta$ ，即 $\alpha = \gamma + \delta$ ，因此 $V = U + W$ 。

现任取 $\beta \in W \cap U$ ，由于 $\beta \in U$ ，因此 $\beta = \sum_{j=1}^r k_j \alpha_{i_j}$ 。又由于 $\beta \in W$ ，因此

$$W = \beta + W = \sum_{j=1}^r k_j \alpha_{i_j} + W = \sum_{j=1}^r k_j (\alpha_{i_j} + W)$$

又 \hat{S} 线性无关，故 $k_j = 0 (j = 1, 2, \dots, r)$ ，进而 $\beta = 0$ ，即 $W \cap U = 0$ 。□

例子 2. 取 $V = \mathbb{R}^3$ ， $U = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ (xy 平面)。则 $W_1 = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ (z 轴) 是 U 的一个补子空间。此外， $W_2 = \{(t, t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ (直线 $x = y = z$) 也是 U 的一个补子空间。补子空间一般不唯一。

定理 4. 若 U 是 W 的一个补子空间，即 $V = U \oplus W$ ，则映射 $U \rightarrow V/W$ ， $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{u} + W$ 是同构。

证明. 令 $\sigma: U \rightarrow V/W$ ，定义为 $\sigma(\gamma) = \gamma + W$ ，对任意的 $\gamma \in U$ ，则其是线性映射，我们验证它是双射：

设 $\eta \in U$ ，使得 $\gamma + W = \eta + W$ ，则 $\gamma - \eta \in W$ 。又 $\gamma - \eta \in U$ ，只能有 $\gamma - \eta \in W \cap U$ 。由于 $U + W$ 是直和， $U \cap W = 0$ 。于是 $\gamma - \eta = 0$ ，即 $\gamma = \eta$ 。则 σ 是单射。

任给 $\alpha + W \in V/W$ ，由于 $V = U + W$ ，存在 $\gamma \in U$ ， $\delta \in W$ ，使得 $\alpha = \gamma + \delta$ ，则

$$\sigma(\gamma) = \gamma + W = (\alpha - \delta) + W = \alpha + W$$

因此 σ 是满射。

综上， σ 是双射，进而是同构。□

因此商空间 V/U 与 U 的任意补子空间同构，这表明商空间的定义不依赖于补的选取。

例子 3. $V = \mathbb{R}^3$ ， $U = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ (xy 平面)。取补 $W = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ (z 轴)。则 V/U 与 W 同构，维数为 1。陪集 $(x, y, z) + U$ 对应 z 轴上的点 $(0, 0, z)$ 。

应用举例

商空间常用于构造例子和简化问题。例如，在求解线性方程组时，解空间是 $\ker A$ ，而特解加上齐次解对应商空间中的元素。商空间也是研究不变子空间、Jordan 标准形等高级话题的基础。

进阶习题 1. 设 $V = F^n$, $U = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$ 。求 $\dim(V/U)$ 并描述 V/U 的一个具体同构。

进阶习题 2. 证明：若 $U_1 \subseteq U_2 \subseteq V$ ，则 $(V/U_1)/(U_2/U_1) \cong V/U_2$ 。

证明. 我们通过构造一个线性映射并应用同态基本定理来证明。

步骤 1: 定义映射。 考虑典范投影 $\pi : V \rightarrow V/U_2$ ，以及商映射 $\rho : V \rightarrow V/U_1$ 。由于 $U_1 \subseteq U_2$ ，我们可以定义映射 $\Phi : V/U_1 \rightarrow V/U_2$ 如下：

$$\Phi(\mathbf{v} + U_1) = \mathbf{v} + U_2, \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

需要验证 Φ 是良定义的。若 $\mathbf{v} + U_1 = \mathbf{v}' + U_1$ ，则 $\mathbf{v} - \mathbf{v}' \in U_1 \subseteq U_2$ ，从而 $\mathbf{v} + U_2 = \mathbf{v}' + U_2$ ，故 Φ 的值与代表元选取无关。

步骤 2: 验证线性。 对任意 $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, $\lambda \in F$,

$$\begin{aligned} \Phi((\mathbf{v} + U_1) + (\mathbf{w} + U_1)) &= \Phi((\mathbf{v} + \mathbf{w}) + U_1) \\ &= (\mathbf{v} + \mathbf{w}) + U_2 = (\mathbf{v} + U_2) + (\mathbf{w} + U_2) \\ &= \Phi(\mathbf{v} + U_1) + \Phi(\mathbf{w} + U_1), \\ \Phi(\lambda(\mathbf{v} + U_1)) &= \Phi(\lambda\mathbf{v} + U_1) = \lambda\mathbf{v} + U_2 = \lambda(\mathbf{v} + U_2) = \lambda\Phi(\mathbf{v} + U_1). \end{aligned}$$

所以 Φ 是线性映射。

步骤 3: 确定核与像。 像：对任意 $\mathbf{v} + U_2 \in V/U_2$ ，取 $\mathbf{v} + U_1 \in V/U_1$ ，则 $\Phi(\mathbf{v} + U_1) = \mathbf{v} + U_2$ ，故 Φ 是满射。

核： $\ker \Phi = \{\mathbf{v} + U_1 \in V/U_1 \mid \Phi(\mathbf{v} + U_1) = 0 + U_2\} = \{\mathbf{v} + U_1 \mid \mathbf{v} \in U_2\} = U_2/U_1$ 。

步骤 4: 应用同态基本定理。 由同态基本定理， Φ 诱导一个同构

$$\tilde{\Phi} : (V/U_1)/\ker \Phi \longrightarrow \text{im } \Phi,$$

即

$$(V/U_1)/(U_2/U_1) \cong V/U_2.$$

这就完成了证明。

□