2026年4月6日 星期一 16:59

习题课.

1 设 $A=\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{0} \end{pmatrix} \in SM_3(\mathbb{Z}_5)$. 计算 $P\in GL_3(\mathbb{Z}_5)$ 和 D 满足

实现: ① 每步操作后的矩阵仍对称

② 最后下要取转置.

角矩阵 D, s.t $D=P^TAP$

解: $\left(\begin{array}{c|c} A & I_3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{0} \end{matrix} & \begin{matrix} \bar{1} & & \\ & \bar{1} & \\ & & \bar{1} \end{matrix} \end{array}\right)$

$\xrightarrow{i\to 2+i\cdots} \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{1} & \bar{4} & \bar{0} \end{matrix} & \begin{matrix} \bar{1} & \bar{1} & \\ & \bar{1} & \\ & & \bar{1} \end{matrix} \end{array}\right) \xrightarrow{(1,2)+(2,1)} \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \bar{3} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \end{matrix} & \begin{matrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{matrix} \end{array}\right)$

$\xrightarrow{3\times(1)+(3)} \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \bar{3} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{3} \end{matrix} & \begin{matrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{matrix} \end{array}\right)$ 故 $P=\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$, $P^TAP=\begin{pmatrix} \bar{3} & & \\ & \bar{3} & \\ & & \bar{3} \end{pmatrix}$

对角线照抄, 其余平分

2. F 是特征不为2 的域. F^3 上二次型 $q=x_1^2-2x_1x_2+5x_2x_3$. 计算 q 在 F^3 的标准基下矩阵和 $\operatorname{rank}(q)$.

解: 标准基下矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 记为 A.

$\det A=-1\neq 0$, 故 $\operatorname{rank} q=3$

3. F 是特征不为 2 的域, V 是 F 上有限维 n 维线性空间. $f,g\in V^*$

令 $q: V\longrightarrow F$

$x\longrightarrow f(x)\cdot g(x)$

i) 验证: q 为 V 上二次型

ii) $\operatorname{rank}(q)=\dim\langle f,g\rangle$

证明: i) ① $\forall x\in V$, $q(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=f(x)\cdot g(x)=q(x)$

② $h(x,y)=\dfrac{q(x+y)-q(x)-q(y)}{2}=\dfrac{f(x)g(y)+f(y)g(x)}{2}$

为对称双线性型, 故 q 为 V 上二次型.

ii) 由 i), $h(x,y)=\dfrac{f(x)g(y)+f(y)g(x)}{2}$ 为 q 的配极. 设 $e_1,e_2\cdots e_n$ 为 V 一组基, 则 q 在该基底下矩阵为

$A=(h(e_i,e_j))_{n\times n}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} f(e_1) \\ \vdots \\ f(e_n) \end{pmatrix}(g(e_1),\cdots,g(e_n))+\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} g(e_1) \\ \vdots \\ g(e_n) \end{pmatrix}(f(e_1),\cdots f(e_n))$

$r(A)\leq 2$.

(a) 若 $\dim\langle f,g\rangle=1$, 则 $\exists\lambda\neq 0$, $g=\lambda f$.

此时 $A=\lambda\begin{pmatrix} f(e_1) \\ \vdots \\ f(e_n) \end{pmatrix}(f(e_1)\cdots f(e_n))$, 故 $r(A)=1=\dim\langle f,g\rangle$

(b) 若 $\dim\langle f,g\rangle=2$. 即 $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} f(e_1) & g(e_1) \\ \vdots & \vdots \\ f(e_n) & g(e_n) \end{pmatrix}=2$

故 $\exists$ 二阶子式满秩, 不妨设 $\det\begin{pmatrix} f(e_1) & g(e_1) \\ f(e_2) & g(e_2) \end{pmatrix}\neq 0$

考虑 A 中由 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 组成的二阶子式 $\begin{vmatrix} f(e_1)g(e_1) & \frac{f(e_1)g(e_2)+f(e_2)g(e_1)}{2} \\ \frac{f(e_1)g(e_2)+f(e_2)g(e_1)}{2} & f(e_2)g(e_2) \end{vmatrix}$

计算得行列式为 $\left[\dfrac{f(e_1)g(e_2)-f(e_2)g(e_1)}{2}\right]^2\neq 0$, 故 $r(A)=2$

4 $q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_1x_3-2x_1x_2-2x_2x_3$

i) 求对称矩阵 A, s.t $q=(x_1,x_2,x_3)A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

ii) 求可逆矩阵 P, s.t P^TAP 为对称矩阵并计算 P^TAP.

解: i) $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

ii) $\left(\begin{array}{c|c} A & I_3 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & & \\ 2 & 0 & -1 & & 1 & \\ -1 & -1 & 1 & & & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{1\to(i+1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)\to(3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$

$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $P^TAP=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5. V 为 R 上 n 维线性空间, q 为 V 上二次型. 证明: V 中存在三个子空间 V_1,V_2,V_3 满足:

i) $\forall x\in V_1, x\neq 0$, $q(x)>0$, $\forall x\in V_2$, $x\neq 0$, $q(x)<0$. $\forall x\in V_3$, $q(x)=0$

ii) $V=V_1\oplus V_2\oplus V_3$.

证明: 由惯性定律, 对 q 的一组规范基 $\{\alpha_1\cdots\alpha_k,\beta_1\cdots\beta_l,\gamma_1\cdots\gamma_m\}$ $(k,l,m\geq 0,\ k+l+m=n)$

s.t 在该基下 q 的矩阵为

$A=\begin{pmatrix} E_k & & \\ & -E_l & \\ & & 0_m \end{pmatrix}_{n\times n}$ $V_3=\operatorname{span}(\gamma_1,\cdots,\gamma_m)$.

令 $V_1=\operatorname{span}(\alpha_1\cdots\alpha_k)$, $V_2=\operatorname{span}(\beta_1\cdots\beta_l)$,

由此定义立即得到 $V=V_1\oplus V_2\oplus V_3$.

① 对 $\forall x\in V_1$, $\exists\ a_1\cdots a_k$, s.t $x=a_1\alpha_1+\cdots+a_k\alpha_k$.

则 $q(x)=(a_1,a_2,\cdots a_k,0\cdots 0)A\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2$

故若 $x\neq 0$, 则 $q(x)>0$

② $\forall x\in V_2$, $x\neq 0$, 设 $x=b_1\beta_1+\cdots+b_l\beta_l$, b_i 不全为 0 $(1\leq i\leq l)$

则 $q(x)=-b_1^2-\cdots-b_l^2<0$

③ $\forall x\in V_3$, $q(x)=0$

补充

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \cdots & \frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$, 求 A 的签名

解: A 对应的二次型为 $q=x_1^2+\cdots+x_n^2+\sum\limits_{1\leq i\leq j\leq n}x_ix_j$

$=\dfrac{1}{2}(x_1+\cdots+x_n)^2+\dfrac{1}{2}(x_1^2+\cdots+x_n^2)$

$q\geq 0$ 且 "=" 成立当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$, 故 A 正定.

签名为 $(n,0)$

2. 求可逆矩阵 P, s.t P^TAP 为对角矩阵并计算 P^TAP

(a) $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 9 & 6 \end{pmatrix}$

解: (a) $P=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P^TAP=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & -3 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

(b) $P=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P^TAP=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

3. 设 A 为 n 阶反对称矩阵, 则 A 合同于下列形状的分块矩阵

$\begin{pmatrix} S & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & S & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$ 其中 $S=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

特别地, 反对称矩阵 A 的秩必为偶数 $2r$. r 为上述矩阵中 S 个数.

证明: 对 A 的阶数 n 作归纳 2 步归纳.

① $n=0,1$ 时显然成立.

② 假设对 $<n$ 阶时成立, 现有 n 阶反对称矩阵 A. 若 $A=0$, 则命题成立. 否则 $\exists\ a_{ij}\neq 0$ $(i<j)$. 将第 1 行与第 i 行互换, 第 1 列与第 j 列互换. 再将第 2 行与第 j 行互换, 第 2 列与第 i 列互换. 最后在第 1 行乘以 $\frac{1}{a_{ij}}$, 第 1 列乘以 $\frac{1}{a_{ij}}$, 得到矩阵与 A 合同. 且形状为

$M=\begin{pmatrix} S & P \\ -P^T & A_{n-2} \end{pmatrix}$

其中 A_{n-2} 为 $n-2$ 阶反对称矩阵.

下一步对分块矩阵 M 作初等变换. 第一行左乘 PS^{-1} 加至第 2 行. 第一列右乘 $S^{-1}P$ 加至第 2 列得到

$N=\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & A_{n-2}+P^TS^{-1}P \end{pmatrix}$

注意 $(P^TS^{-1})^T=-S^{-1}P$. 故上述变换仍为合同变换. 且 $A_{n-2}+P^TS^{-1}P$ 仍为反对称矩阵. 故由归纳假设, N 合同于 $\begin{pmatrix} S & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & S & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$

推论: n 阶实反对称矩阵 A 行列式总是非负实数

4. 设 A 为 n 阶实对称矩阵, 若 A 半正定, 则 A 的伴随矩阵 A^* 也半正定.

证明: 由于 A 半正定, 故 $\exists$ 可逆矩阵 P, s.t $P^TAP=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$

① $r=n$, $\Longrightarrow P^TA^*(P^T)^T=I_n$, 故 A^* 正定

② $r=n-1$ $\Longrightarrow P^TA^*(P^T)^T=\begin{pmatrix} 0_{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 故 A^* 半正定

③ $r<n-1$ $\Longrightarrow A^*=0$, 故正.