第六次作业解答

习题 1. (分块矩阵的相伴消元公式) 设 $A=\begin{pmatrix} B & C \\ C^t & M \end{pmatrix} \in \mathrm{SM}_n(F)$，其中 $B\in \mathrm{GL}_k(F)$ 且 $1\le k<n$。验证：

$$\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ -C^tB^{-1} & I_{n-k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & C \\ C^t & M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_k & -B^{-1}C \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & M-C^tB^{-1}C \end{pmatrix}.$$

解. 直接进行分块矩阵乘法。首先计算左边前两个矩阵的乘积：

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} I & 0 \\ -C^tB^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & C \\ C^t & M \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} B & C \\ -C^tB^{-1}B+C^t & -C^tB^{-1}C+M \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & M-C^tB^{-1}C \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

再将所得结果右乘第三个矩阵：

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & M-C^tB^{-1}C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -B^{-1}C \\ 0 & I \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} B & -BB^{-1}C+C \\ 0 & M-C^tB^{-1}C \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & M-C^tB^{-1}C \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

这正是所要验证的等式。 □

习题 2. 设 $q(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3-2x_2x_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的二次型。计算 q 的签名。

解. **合同对角化法：** 二次型 q 对应的对称矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 0 & \frac12 & \frac12 \\ \frac12 & 0 & -1 \\ \frac12 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

我们通过同时进行初等行变换与相同的列变换（即合同变换）将 A 化为对角形，每次将主元变为非零以便消去同行同列元素。

首先，第一行第一列元素为 0，但 $(1,2)$ 元非零，故先将第 2 行加到第 1 行，同时第 2 列加到第 1 列：

$$A \xrightarrow{r_1+r_2} \begin{pmatrix} \frac12 & \frac12 & -\frac12 \\ \frac12 & 0 & -1 \\ \frac12 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1+c_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac12 & -\frac12 \\ \frac12 & 0 & -1 \\ -\frac12 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

现在 $(1,1)$ 元为 $1 \neq 0$。用第一行消去第一列其余元素：第二行减去第一行的 $\frac{1}{2}$ 倍，第三行加上第一行的 $\frac{1}{2}$ 倍；同时对列作同样操作：

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+\frac{1}{2}r_1]{r_2-\frac{1}{2}r_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3+\frac{1}{2}c_1]{c_2-\frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

接着处理右下角的 2×2 子块。第二行第二列元为 $-\frac{1}{4} \neq 0$。先将第二行乘以 -4，第二列也乘以 -4（这相当于合同变换中取对角阵 $\mathrm{diag}(1,-4,1)$）：

$$\xrightarrow[c_2\times(-4)]{r_2\times(-4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

现在 $(2,2)$ 元为 -4。消去第三行的第二列元素：第三行加上第二行的 $\frac{3}{4}$ 倍，同时对列作相同变换：

$$\xrightarrow{r_3+\frac{3}{4}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3+\frac{3}{4}c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

最后，通过行、列乘以非零常数可调整对角元符号，得到规范形。这里对角元依次为 $1,-4,2$，一正一负一正，故正惯性指数为 2，负惯性指数为 1。签名仍为 $(2,1)$。

配方法：将 q 化为平方和的形式。先将含 x_1 的项集中：

$$q = x_1(x_2+x_3) - 2x_2x_3.$$

作变量代换以消去交叉项。令

$$u = x_2 + x_3, \quad v = x_2 - x_3,$$

则

$$x_2 = \frac{u+v}{2}, \quad x_3 = \frac{u-v}{2}.$$

代入 x_2x_3：

$$x_2x_3 = \frac{(u+v)(u-v)}{4} = \frac{u^2-v^2}{4}.$$

于是

$$q = x_1u - 2\cdot\frac{u^2-v^2}{4} = x_1u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}v^2.$$

再对 x_1 和 u 进行配方：

$$x_1 u - \frac{1}{2}u^2 = -\frac{1}{2}\left(u^2 - 2x_1 u\right) = -\frac{1}{2}\left((u-x_1)^2 - x_1^2\right) = -\frac{1}{2}(u-x_1)^2 + \frac{1}{2}x_1^2.$$

因此

$$q = \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}(u-x_1)^2 + \frac{1}{2}v^2.$$

作可逆线性替换：

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = u - x_1 = x_2 + x_3 - x_1, \quad y_3 = v = x_2 - x_3,$$

则 q 在新变量下表示为

$$q = \frac{1}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + \frac{1}{2}y_3^2.$$

三个平方项的系数分别为正、负、正，故正惯性指数为 2，负惯性指数为 1，零惯性指数为 0。签名记为 $(2,1)$。 □

习题 3. 设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$ 半正定。证明对于任意正整数 m，A^m 也半正定。

解. 因为 A 是实对称半正定矩阵，存在实矩阵 C 使得 $A = C^t C$。

下面分 m 的奇偶性讨论。(每种情形我们都展示两种方式来证明)

若 $m = 2k$ 为偶数，记 $B = A^k$，则 B 是实对称矩阵，且 $A^m = B^2 = B^t B$。**或者**对任意 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$，

$$\mathbf{x}^t A^m \mathbf{x} = \mathbf{x}^t B^t B \mathbf{x} = (B\mathbf{x})^t (B\mathbf{x}) = \|B\mathbf{x}\|^2 \geq 0,$$

故 A^m 半正定。

若 $m = 2k+1$ 为奇数，记 $D = CA^k$，则 $A^m = A^k C^t C A^k = D^t D$。**或者**对任意 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$，由 A 是半正定的，

$$\mathbf{x}^t A^m \mathbf{x} = \mathbf{x}^t (A^k)^t A A^k \mathbf{x} = (A^k\mathbf{x})^t A (A^k \mathbf{x}) \geq 0,$$

故 A^m 也半正定。

综上，对任意正整数 m，A^m 半正定。 □

习题 4. 设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$ 且 $\det(A) < 0$。证明：存在 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\mathbf{x}^t A \mathbf{x} < 0$。

解. 由于 A 是实对称矩阵，根据惯性定理（合同对角化），存在可逆实矩阵 P，使得

$$P^t A P = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1, 0, \ldots, 0),$$

其中正惯性指数为 p，负惯性指数为 q，零的个数为 $n-p-q$。计算行列式：

$$\det(P^tAP) = (\det P)^2 \det A.$$

因为 $\det A < 0$，而 $(\det P)^2 > 0$，故 $\det(P^tAP) < 0$。另一方面，由对角形知

$$\det(P^tAP) = 1^p \cdot (-1)^q \cdot 0^{n-p-q}.$$

若 $n-p-q > 0$，则行列式为 0，与 < 0 矛盾。故 $n-p-q = 0$，即零惯性指数为 0，且

$$\det(P^tAP) = (-1)^q.$$

由于该行列式小于零，q 必为奇数，从而 $q \geq 1$。这意味着负惯性指数至少为 1。

取 $\mathbf{y} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^t$，其中 1 放在对应某个 -1 的位置。则

$$\mathbf{y}^t(P^tAP)\mathbf{y} = -1 < 0.$$

令 $\mathbf{x} = P\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$，由于 P 可逆，$\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$，且

$$\mathbf{x}^tA\mathbf{x} = (P\mathbf{y})^tA(P\mathbf{y}) = \mathbf{y}^t(P^tAP)\mathbf{y} = -1 < 0.$$

这就找到了满足条件的向量 $\mathbf{x}$。 □

习题 5. 设 V 是 $\mathbb{R}$ 上的 n 维线性空间，$f_1, \ldots, f_s, g_1, \ldots, g_t \in V^*$。令

$$q = f_1^2 + \cdots + f_s^2 - g_1^2 - \cdots - g_t^2.$$

(i) 验证 q 是 V 上的二次型。

(ii) 证明：q 的正惯性指数不大于 s，负惯性指数不大于 t。

解. (i) 在 V 中取定一组基 $\{e_1, \ldots, e_n\}$，将 V 中向量 $\mathbf{v}$ 表示为 $\mathbb{R}^n$ 中的列向量 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t$。每个线性泛函 f_i (或 g_j) 在这组基下对应一个 n 维行向量 $\mathbf{a}_i^t$ (或 $\mathbf{b}_j^t$)，即

$$f_i(\mathbf{v}) = \mathbf{a}_i^t\mathbf{x}, \quad g_j(\mathbf{v}) = \mathbf{b}_j^t\mathbf{x}.$$

构造 $n \times n$ 矩阵 C，其前 s 行依次为 $\mathbf{a}_1^t, \ldots, \mathbf{a}_s^t$，接下来 t 行依次为 $\mathbf{b}_1^t, \ldots, \mathbf{b}_t^t$，若 $s+t < n$ 则剩余行补为零向量。同时，令 Λ 为 $n \times n$ 对角矩阵，其对角

线元素依次为：前 s 个为 1，接着 t 个为 -1，剩余 $n-s-t$ 个为 0。即

$$\Lambda = \begin{pmatrix} I_s & 0 & 0 \\ 0 & -I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

直接计算可知对任意 $\mathbf{v} \in V$，设 $x \in R^n$ 为其在给定基下的向量，则

$$q(\mathbf{v}) = (C\mathbf{x})^t \Lambda (C\mathbf{x}) = x^t C^t \Lambda C x.$$

因此，q 是在基 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ 下以 $A = C^t \Lambda C$ 为对应矩阵的二次型。

(ii) 设二次型 q 的正惯性指数为 p，负惯性指数为 m。则其合同于对角阵

$$\Lambda' = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

设二次型 q 在基 $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n\}$ 下对应的矩阵为 Λ'，取 p 维子空间 $W_+ = \langle \epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_p \rangle \subset V$ 使得 q 在 W_+ 上正定；类似地，可取 m 维子空间 $W_- \subset \mathbb{R}^n$ 使得 q 在 W_- 上负定。

先证 $p \leq s$。考虑线性映射 $C|_{W_+} : W_+ \to \mathbb{R}^n$, 将 $\mathbf{v} = (e_1, \ldots, e_n)x$ ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 为 $\mathbf{v}$ 在基 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ 下的坐标) 映射到 $C\mathbf{x}$。若存在非零 $\mathbf{v} \in W_+$，其在基 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ 下坐标为 $x \in \mathbb{R}^n$，使得 $C\mathbf{x} = \mathbf{0}$，则 $q(\mathbf{v}) = (C\mathbf{x})^t \Lambda (C\mathbf{x}) = 0$，与 W_+ 上正定性矛盾。故 $C|_{W_+}$ 是单射从而 $\dim C(W_+) = \dim W_+ = p$。又因为对任意非零 $\mathbf{y} \in C(W_+)$，存在 $\mathbf{v} = (e_1, \ldots, e_n)x \in W_+$ 使 $\mathbf{y} = C\mathbf{x}$，且

$$\mathbf{y}^t \Lambda \mathbf{y} = q(\mathbf{v}) > 0,$$

故 Λ 在子空间 $C(W_+)$ 上正定。而 Λ 的正惯性指数显然为 s，我们下面证明任意使 Λ 正定的子空间维数不超过 s。因此 $p = \dim C(W_+) \leq s$。

证明： 记 Q 为矩阵 Λ 在给定基下确定的二次型，

$$Q(\mathbf{z}) = z_1^2 + \cdots + z_s^2 - z_{s+1}^2 - \cdots - z_{s+t}^2.$$

设 U 是使 Q 正定的子空间，且 $\dim U = d$。考虑投影映射 $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$，取前 s 个坐标。若 $d > s$，则限制映射 $\pi|_U : U \to \mathbb{R}^s$ 必有非零核（维数公式 $\dim \ker(\pi|_U) = \dim U - \dim Im(\pi) \geq d - s > 0$）。取非零 $\mathbf{u} \in \ker(\pi|_U)$，则 $\mathbf{u}$ 的前 s 个坐标为 0，于是 $Q(\mathbf{u}) = -u_{s+1}^2 - \cdots - u_{s+t}^2 \leq 0$，且 $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$，这与 U 上 Q 正定矛盾。因此 $d \leq s$。

同理可证 $m \le t$。考虑 $C|_{W_-}: W_- \to \mathbb{R}^n$。它同样是单射，且对非零 $\mathbf{y} \in C(W_-)$，有 $\mathbf{y}^t \Lambda \mathbf{y} < 0$，即 Λ 在 $C(W_-)$ 上负定。而 Λ 的负惯性指数为 t，故 $m = \dim C(W_-) \le t$。

综上，q 的正惯性指数 $\le s$，负惯性指数 $\le t$。

$\square$

有限域 $\mathbb{F}_q^n$ 的子空间计数与 q-模拟

我们先从一个简单问题开始我们今天探讨的话题：设 $q = p^r$（p 为素数，$r \ge 1$），我们已经接触过有限域 $\mathbb{F}_q$。那么

问题 1. $\mathbb{F}_q^n$ 的 k 维子空间一共有多少个？

向量空间 $\mathbb{F}_q^n$ 共有 q^n 个元素。我们先来看一些基本的计数事实，这些事实是推导子空间个数的基石。

引理 1 (有序线性无关组的计数)**.** $\mathbb{F}_q^n$ 中任意一组 k 长的有序线性无关组 $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$（$k \le n$）的数目为

$$(q^n - 1)(q^n - q)(q^n - q^2) \cdots (q^n - q^{k-1}).$$

证明. 选取第一个非零向量 v_1 有 $q^n - 1$ 种方法（排除零向量）。选定 v_1 后，v_2 不能落在 v_1 张成的一维子空间内，该子空间有 q 个元素，故 v_2 有 $q^n - q$ 种选择。一般地，假设前 $i-1$ 个向量已选好，它们张成一个 $(i-1)$ 维子空间，含有 q^{i-1} 个元素，因此第 i 个向量必须取自该子空间之外，选择数为 $q^n - q^{i-1}$。乘起来即得结论。 $\square$

引理 2 (k 维子空间的有序基)**.** 设 W 是 $\mathbb{F}_q^n$ 的一个 k 维子空间。则 W 的有序基的数目为

$$(q^k - 1)(q^k - q) \cdots (q^k - q^{k-1}).$$

证明. 将上述引理中的 n 替换为 k 即可，因为 $W \cong \mathbb{F}_q^k$。 $\square$

现在我们可以计算 $\mathbb{F}_q^n$ 中 k 维子空间的个数，记为 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$。

定理 1 (k 维子空间个数)**.**

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{k-1})}{(q^k - 1)(q^k - q) \cdots (q^k - q^{k-1})}.$$

证明. 每个 k 维子空间可以由其任意一组有序基唯一确定（不计基的次序）。我们用两种方式计算所有 k 元线性无关有序组的数目：由引理 1，为

$$N = (q^n - 1)(q^n - q)\cdots(q^n - q^{k-1}).$$

另一方面，对于任意一个固定的 k 维子空间 W，其有序基的数目为

$$D = (q^k - 1)(q^k - q)\cdots(q^k - q^{k-1}).$$

因为不同的 k 维子空间对应的有序基集合两两不交，所以我们可以得到 k 元线性无关有序组的数目是 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q D$，从而

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q D = N$$

故 k 维子空间的总数等于 N/D。 □

上述证明用到的方法叫做“算两次”，常用于难以直接计数的对象。这个公式可以改写为更对称的形式。注意到对每个因子提取 q 的幂次：

$$q^n - q^i = q^i(q^{n-i} - 1),$$

于是分子和分母可以约去大量 q 的幂，得到只含 $q^i - 1$ 因子的表达式。

推论 1.

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1)\cdots(q^{n-k+1} - 1)}{(q^k - 1)(q^{k-1} - 1)\cdots(q - 1)}.$$

例子 1. 取 $n = 3, k = 1$：

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}_q = \frac{q^3 - 1}{q - 1} = q^2 + q + 1.$$

即 $\mathbb{F}_q^3$ 中一维子空间（过原点的直线）的个数为 $q^2 + q + 1$。这对应射影平面 $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)$ 的点数。

取 $n = 4, k = 2$：

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}_q = \frac{(q^4 - 1)(q^3 - 1)}{(q^2 - 1)(q - 1)} = (q^2 + 1)(q^2 + q + 1) = q^4 + q^3 + 2q^2 + q + 1.$$

注. 当 $q \to 1$ 时，每个因子 $\frac{q^m - 1}{q - 1} \to m$，因此

$$\lim_{q\to 1} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1} = \binom{n}{k}.$$

这正是“q- 模拟”名称的来源：高斯二项式系数是经典二项式系数的单参数形变，它在 $q \to 1$ 时退化为经典版本。

q- 模拟的基本语言

为了将上述观察系统化，我们引入一套专门的语言——q- 整数、q- 阶乘和 q- 二项式系数。

定义 1 (q- 整数)**.** 对于非负整数 n，定义其 **q- 整数**（q-integer）为

$$[n]_q = \frac{q^n - 1}{q - 1} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} \quad (n \geq 1),$$

并约定 $[0]_q = 0$。

显然 $\lim_{q\to1}[n]_q = n$。q- 整数保留了加法和乘法的一些良好性质，但不再是普通的整数环结构。

定义 2 (q- 阶乘)**.**

$$[n]_q! = [1]_q[2]_q \cdots [n]_q = \frac{(q-1)(q^2-1)\cdots(q^n-1)}{(q-1)^n},$$

且 $[0]_q! = 1$。

定义 3 (高斯二项式系数)**.** 对 $0 \leq k \leq n$，定义

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q!\,[n-k]_q!}.$$

经过简单的代数化简，可以验证该定义与第 3 节的公式完全一致：

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-k+1}-1)}{(q^k-1)(q^{k-1}-1)\cdots(q-1)}.$$

基本性质

高斯二项式系数满足许多与经典二项式系数平行的性质。

命题 1 (对称性)**.**

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}_q.$$

证明. 直接由定义即得。 □

命题 2 (q-Pascal 恒等式)**.**

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q = q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q.$$

证明. 从组合定义出发，考虑 $\mathbb{F}_q^n$ 中 k 维子空间 W。固定一个一维子空间 L（共有 $[n]_q$ 个选择），分类讨论 W 是否包含 L。如果 $L \subseteq W$，则 W/L 是 $\mathbb{F}_q^n/L \cong \mathbb{F}_q^{n-1}$ 的 $(k-1)$ 维子空间，个数为 $\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q$（可以验证 $\mathbb{F}_q^n$ 中包含 L 的 k 维子空间与 $\mathbb{F}_q^n/L$ 中的 $k-1$ 维子空间一一对应）；如果 $L \not\subseteq W$，则 W 在商映射下的像仍是 k 维的，且原像有 q^k 种方式选取（因为每个陪集可任选代表元），故个数为 $q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q$。两式相加即得第一种形式；利用对称性可得第二种形式。 □

当 $q \to 1$ 时，该递推关系退化为经典的 Pascal 恒等式 $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$。

q- 模拟的进一步推广

子空间计数仅仅是 q- 模拟世界的一个入口。类似的思想渗透在组合学、表示论、特殊函数论等众多领域。

二项式定理的 q- 版本

经典二项式定理为 $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$。在非交换的设定下（例如 x 与 y 满足 $yx = qxy$），我们有

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k y^{n-k}.$$

这称为 q- **二项式定理**，其中变元满足 $yx = qxy$（例如在量子平面中）。

q- 导数

经典导数 $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$ 的 q- 模拟定义为

$$D_q f(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x}.$$

容易验证 $D_q x^n = [n]_q x^{n-1}$。同样地，在 q 趋近于 1 时，不难发现 $D_q f(x)$ 趋近于 $\frac{d}{dx}(x)$。基于此可以建立一套 q- 微积分。

下面的习题体现了对排序数的模拟:

进阶习题 1. 证明：用 $A < B$ 表示 A 是 B 的真子空间，则

$$[n]_q! = \#\{(V_0, V_1, \ldots, V_n) | 0 = V_0 < V_1 < \ldots < V_n = \mathbb{F}_q^n\}$$

证明. 每个 V_i 都是 V_{i+1} 的真子空间，于是维数至少减少 1，即

$$\dim(V_i) \leqslant \dim(V_{i+1}) - 1$$

那么

$$\begin{aligned}\dim(V_0) &\leqslant \dim(V_1) - 1\\ &\leqslant \dim(V_2) - 2\\ &\cdots\\ &\leqslant \dim(V_n) - n\end{aligned}$$

注意到 $\dim(\mathbb{F}_q^n) = n, \dim(0) = 0$,于是上面每个不等号都取等,则 $\dim(V_i) = i$，对 $i = 0, 1, \ldots, n$ 成立。那么对给定的 V_{i+1}，在其所有 i 维子空间中选取一个作为 V_i，这有 $\begin{bmatrix} i+1 \\ i \end{bmatrix}_q = [i+1]_q$ 种选法。从 V_n 开始一直操作至 $i = 0$，即确定了一组这样的子空间序列。于是根据乘法原理，

$$\#\{(V_0, V_1, \ldots, V_n) | 0 = V_0 < V_1 < \ldots < V_n = \mathbb{F}_q^n\} = [n]_q!$$

□