2026年4月18日 星期六 11:37

作业

1 设 $M=\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix}$. 计算M所有顺序主子式，并说明M不是半正定的.

证明：$\det(A_1)=0$，$\det(A_2)=\det\begin{vmatrix}0&0\\0&-1\end{vmatrix}=0$

设M为二次型q在基$\{e_1,e_2\}$下矩阵，令 $\alpha=e_2$，则

$q(\alpha)=(0,1)\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=-1<0$，故M不是半正定的.

2. 设 $A\in SM_n(\mathbb{R})$，Δ_i是A的i阶顺序主子式，$1\le i\le n$. 证明A负定 $\Longleftrightarrow (-1)^i\Delta_n>0\ (1\le i\le n)$

证明：A负定 $\Longleftrightarrow -A$正定 $\Longleftrightarrow -A$所有顺序主子式大于0

$\Longleftrightarrow \Delta_i(-A)=(-1)^i\Delta_n>0\quad(1\le i\le n)$.

3 $A\in SM_n(\mathbb{R})$，证明：如果A半正定，则A主子式非负.

证明：设 $A_{i_1i_2\cdots i_k}$ 为A对应 $1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n$ 的主子式，

$\forall\ \alpha\in\mathbb{R}^k$，$\alpha=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_k\end{pmatrix}$，令 $\beta=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\x_1\\0\\\vdots\\0\\x_2\\0\\\vdots\\0\\x_k\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\\leftarrow i_1\\\\\\\\\leftarrow i_2\\\\\\\\\leftarrow i_k\end{matrix}$，则 $\alpha^TA_{i_1\cdots i_k}\alpha$

$=\beta^TA\beta\ge0$

故 $A_{i_1\cdots i_k}$ 半正定，$\det(A_{i_1\cdots i_k})\ge0$

4. $A\in SM_n(\mathbb{R})$，$B\in M_n(\mathbb{R})$. 证明：若A半正定，则 B^TAB 半正定且它正惯性指数小于等于A正惯性指数.

证明：A半正定，$\exists\ P\in M_n(\mathbb{R})$，$\mathrm{rank}(P)=\mathrm{rank}A$，$A=P^TP$，

则 $B^TAB=B^TP^TPB=(PB)^TPB$ 半正定，且正惯性指数即为

$\mathrm{rank}(B^TAB)=\mathrm{rank}((PB)^TPB)=\mathrm{rank}(PB)\le\mathrm{rank}(P)=\mathrm{rank}A$

rank A 为A正惯数指数.

5. $A\in SM_n(\mathbb{R})$. 证明. 存在 $r\in\mathbb{R}$ s.t $rE+A$ 正定

证明：令 $r>\max\left\{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right\}_{1\le i\le n}$，则 $rE+A$ 任意顺序主子式

对应矩阵均为主对角占优的. 故 $\Delta_m>0\ (1\le m\le n)$.

$\Longrightarrow rE+A$ 正定.

6. 设 $e_1\cdots e_n$是V一组基，$V_1=\langle e_1,\cdots,e_k\rangle$ 和 $V_2=\langle e_{k+1},\cdots,e_n\rangle$.

证明：$V=V_1\oplus V_2$.

证明：$\forall\ \alpha\in V$，$\exists\ x_1\cdots x_n$，$\alpha=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\in V_1+V_2$

另一方面，设 $\beta\in V_1\cap V_2$，故 $\exists(b_1\cdots b_k)$，$(b_{k+1}\cdots b_n)$

$\beta=b_1e_1+\cdots+b_ke_k=b_{k+1}e_{k+1}+\cdots+b_ne_n$

$\Longrightarrow b_1=\cdots=b_k=b_{k+1}=\cdots=b_n=0$ 故 $\beta=0$

综上 $V=V_1\oplus V_2$.

期中复习

1.(转移矩阵). 设F是域，V为F上n维线性空间. 设$\{e_1,\cdots,e_n\}$为V的一组基，$\alpha\in V$在$\{e_1\cdots e_n\}$下坐标为$\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$，$\{e_1'\cdots e_n'\}$为V另一组基. $\{e_1,\cdots,e_n\}$到$\{e_1',\cdots,e_n'\}$之间转移矩阵为P.

则 α 在$\{e_1'\cdots e_n'\}$下坐标为 $P^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$

(有时会默认$\{e_1\cdots e_n\}$为标准基，这时会直接给出 $\alpha=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$，此时$\alpha$在$\{e_1'\cdots e_n'\}$下坐标为 $(e_1',\cdots,e_n')^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$.)

2 对偶空间：V为F上n维线性空间，任给V上一组基$\{e_1\cdots e_n\}$，则存在$\{e_1^*,\cdots e_n^*\}\subseteq V^*$，$e_i^*(e_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\0 & 其他\end{cases}$. $\{e_1^*,\cdots,e_n^*\}$称为$\{e_1,\cdots,e_n\}$对偶基.

例：记号如上，且V为域. 证明：若 $\exists f\in V^*\backslash\{0\}$，则 $\forall\ \alpha\in V^*$ $\exists\ v\in V$. s.t $\alpha=v\cdot f$： $\begin{matrix}V\longrightarrow F\\u\longrightarrow vf(u)=f(uv)\end{matrix}$

证明：只需证明$\{e_1\cdot f,\cdots,e_n\cdot f\}$构成$V^*$一组基即可.

3. 双线性型

$f:\ V\times V\longrightarrow F$
$\quad(x,y)\longrightarrow f(x,y)\qquad \forall\ a_1,a_2,b_1,b_2\in F$，$x,y,x_1,y_1,x_2,y_2\in V$

(1) $f(a_1x_1+a_2x_2,y)=a_1f(x_1,y)+a_2f(x_2,y)$

(2) $f(x,b_1y_1+b_2y_2)=b_1f(x,y_1)+b_2f(x,y_2)$.

则称f为V上双线性型

(验证f为双线性型需说明(1)(2))

对于V在F上一组基$\{e_1,\cdots,e_n\}$，以及 $x=(e_1\cdots e_n)\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$

$y=(e_1\cdots e_n)\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$，有 $f(x,y)=(x_1\cdots x_n)\begin{pmatrix}f(e_i,e_j)\end{pmatrix}_{n\times n}\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$

故称 $\begin{pmatrix}f(e_i,e_j)\end{pmatrix}_{n\times n}$ 为f在$\{e_1,\cdots,e_n\}$下矩阵表示.

(常见题型：给f，给$\{e_1\cdots e_n\}$，求对应矩阵).

4. 更特殊的情形(对称双线性型，二次型)

4.1 给 $q:V\longrightarrow F$，验证q为二次型

(a) $q(x)=q(-x)$，$\forall\ x\in V$

(b) 配极 $f=\dfrac{q(x+y)-q(x)-q(y)}{2}$ 为对称双线性型，即验证

$f(a_1x_1+a_2x_2,y)=a_1f(x_1,y)+a_2f(x_2,y)$

$f(x,b_1y_1+b_2y_2)=b_1f(x,y_1)+b_2f(x,y_2)$

$f(x,y)=f(y,x)$.

☆☆☆ 4.2. 给二次型q，求对应矩阵A. 再找可逆矩阵P，P^TAP对角化.

例：实数域，$q=2x_1^2+2x_1x_2+4x_1x_3+3x_2^2+2x_2x_3+x_3^2$，求A，P，$P^TAP$

解：$A=\begin{pmatrix}2&1&2\\1&3&1\\2&1&1\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$P^TAP=\begin{pmatrix}2&&\\&\frac{5}{2}&\\&&-1\end{pmatrix}$

☆☆☆ 5 惯性定律：设q为V上二次型，则∃一组规范基$\{e_1\cdots e_n\}$，在此基下q的矩阵为 $\begin{pmatrix}E_k&&\\&-E_l&\\&&0\end{pmatrix}$

k为q正惯性指数，l为q负惯性指数，签名为(k, l)

半正定：$l=0$ 正定：$k=n$ 不定：$k>0,l>0$

半负定：$k=0$ 负定：$l=n$

6 ☆☆衍生命题

6.1 A半正定 $\Longleftrightarrow\ \exists\ P\in M_n(\mathbb{R})$. $\mathrm{rank}P=\mathrm{rank}A$，$A=P^TP$

6.2 A正定 $\Longleftrightarrow\ \exists\ P\in GL_n(\mathbb{R})$，$A=P^TP$

6.3 A正定 $\Longleftrightarrow A^{-1}$正定

练习：A半正定，则A的伴随矩阵A^*也半正定

7 Jacobi判别法：设 $A\in SM_n(F)$. n个顺序主子式均不为0，则

A 相合于 $\begin{pmatrix}\Delta_1&&&\\&\frac{\Delta_2}{\Delta_1}&&\\&&\ddots&\\&&&\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\end{pmatrix}_{n\times n}$

特别地，A正定 $\Longleftrightarrow \Delta_i>0\ (1\le i\le n)$.