第八次作业解答

习题 1. 设 $V = F[x]_{<3}$，$W = F[x]_{<4}$，定义 $\varphi : V \to W,\ f \mapsto xf$。(i) 验证 φ 是线性映射。(ii) 计算 $\operatorname{rank}(\varphi)$。(iii) 确定 $\ker(\varphi)$ 和 $\operatorname{im}(\varphi)$。

解. **(i) 验证 φ 是线性映射。**

设 $f, g \in V$，$\lambda \in F$。则

$$\varphi(f+g) = x(f+g) = xf + xg = \varphi(f) + \varphi(g),$$

$$\varphi(\lambda f) = x(\lambda f) = \lambda(xf) = \lambda\varphi(f).$$

故 φ 保持加法和数乘，从而是线性映射。

(ii) 计算 $\operatorname{rank}(\varphi)$。

取 V 的基底 $\{1, x, x^2\}$，则

$$\varphi(1) = x, \quad \varphi(x) = x^2, \quad \varphi(x^2) = x^3.$$

故 $\operatorname{im}(\varphi) = \operatorname{span}\{x, x^2, x^3\}$，这三个向量在 $W = F[x]_{<4}$ 中线性无关，所以

$$\operatorname{rank}(\varphi) = 3.$$

(iii) 确定 $\ker(\varphi)$ **和** $\operatorname{im}(\varphi)$。

若 $f \in V$ 满足 $\varphi(f) = xf = 0$，由于 $F[x]$ 是整环，$x \neq 0$，故 $f = 0$。因此

$$\ker(\varphi) = \{0\}.$$

由上面的计算，

$$\operatorname{im}(\varphi) = \operatorname{span}\{x, x^2, x^3\} = \{a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mid a_1, a_2, a_3 \in F\}.$$

这是 W 中所有常数项为零的多项式构成的子空间。 □

习题 2. 设 $V = \mathbb{R}[x]_{<4}$，定义 $\Delta : V \to V,\ f(x) \mapsto f(x+1) - f(x)$。(i) 验证 Δ 是线性映射。(ii) 求 Δ 在基底 $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ 下的矩阵。(iii) 计算 $\operatorname{rank}(\Delta)$。(iv) 确定 $\ker(\Delta)$ 和 $\operatorname{im}(\Delta)$。

解. **(i) 验证 Δ 是线性映射。**

设 $f,g\in V$，$\lambda\in\mathbb{R}$。则

$$\begin{aligned}\Delta(f+g)=&(f+g)(x+1)-(f+g)(x)\\=&[f(x+1)-f(x)]+[g(x+1)-g(x)]\\=&\Delta f+\Delta g,\\ \Delta(\lambda f)=&\lambda f(x+1)-\lambda f(x)=\lambda[f(x+1)-f(x)]=\lambda\Delta f.\end{aligned}$$

故 Δ 是线性映射。

(ii) 求 Δ 在基底 $\mathcal{B}=\{1,x,x^2,x^3\}$ 下的矩阵。

逐一计算：

$$\begin{aligned}\Delta(1)&=1-1=0,\\ \Delta(x)&=(x+1)-x=1,\\ \Delta(x^2)&=(x+1)^2-x^2=2x+1,\\ \Delta(x^3)&=(x+1)^3-x^3=3x^2+3x+1.\end{aligned}$$

用基底 $\{1,x,x^2,x^3\}$ 表示（列向量为坐标列）：

$$[\Delta]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&2&3\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

(iii) 计算 $\operatorname{rank}(\Delta)$。

矩阵 $[\Delta]_{\mathcal{B}}$ 是严格上三角矩阵，其第 $2,3,4$ 列对应的像

$$\Delta(x)=1,\quad \Delta(x^2)=2x+1,\quad \Delta(x^3)=3x^2+3x+1$$

线性无关（次数分别为 $0,1,2$），而 $\Delta(1)=0$，故

$$\operatorname{rank}(\Delta)=3.$$

(iv) 确定 $\ker(\Delta)$ 和 $\operatorname{im}(\Delta)$。

由秩—零化定理，$\dim\ker(\Delta)=4-3=1$。因为 $\Delta(1)=0$ 且 $\ker(\Delta)$ 是一维子空间，故

$$\ker(\Delta)=\operatorname{span}\{1\},$$

即所有常数多项式构成的子空间。

由上面的计算，

$$\mathrm{im}(\Delta) = \mathrm{span}\{1, 2x+1, 3x^2+3x+1\} = \mathrm{span}\{1, x, x^2\} = \mathbb{R}[x]_{<3},$$

即次数严格小于 3 的实多项式构成的子空间。 □

习题 3. 设 F 是域，$A, B \in M_n(F)$。证明：当 A 或 B 可逆时，$AB \sim_s BA$；并举例说明，当 A, B 都不可逆时，AB 有可能与 BA 不相似。

证明. **当 A 或 B 可逆时，$AB \sim_s BA$。**

不妨设 A 可逆（B 可逆的情形类似）。则

$$A^{-1}(AB)A = (A^{-1}A)(BA) = BA,$$

即 $BA = A^{-1} \cdot (AB) \cdot A$，所以 AB 与 BA 相似，$AB \sim_s BA$。

当 A, B 都不可逆时的反例。

取 $n = 2$，令

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

则

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

AB 是非零幂零矩阵，BA 是零矩阵，故 AB 与 BA 不相似（零矩阵只与自身相似）。A, B 均不可逆，满足题目要求。 □

习题 4. 设 Δ 如第二题定义。(i) 说明 $\ker(\Delta) + \mathrm{im}(\Delta)$ 不是直和。(ii) 计算 Δ 的极小多项式。

解. **(i) 说明 $\ker(\Delta) + \mathrm{im}(\Delta)$ 不是直和。**

由第二题，

$$\ker(\Delta) = \mathrm{span}\{1\}, \quad \mathrm{im}(\Delta) = \mathbb{R}[x]_{<3} = \mathrm{span}\{1, x, x^2\}.$$

注意 $1 \in \ker(\Delta)$ 且 $1 \in \mathrm{im}(\Delta)$，所以

$$\ker(\Delta) \cap \mathrm{im}(\Delta) = \mathrm{span}\{1\} \neq \{0\}.$$

因此 $\ker(\Delta)+\operatorname{im}(\Delta)$ 不是直和。

(ii) 计算 Δ 的极小多项式。

由第二题，Δ 在基底 $\mathcal{B}=\{1,x,x^2,x^3\}$ 下的矩阵为

$$M=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&2&3\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

M 是严格上三角矩阵，故唯一的特征值为 0，特征多项式为 t^4。

极小多项式 $\mu_\Delta(t)=t^k$，其中 k 是使得 $M^k=0$ 的最小正整数。

计算：

$$M^2=\begin{pmatrix}0&0&2&5\\0&0&0&6\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\neq 0.$$

$$M^3=M^2\cdot M=\begin{pmatrix}0&0&0&6\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\neq 0.$$

$$M^4=0.$$

由于 I_4,M,M^2,M^3 线性无关，$M^4=0$，故极小多项式为

$$\mu_\Delta(t)=t^4.$$

等价地，在多项式语言下，$\Delta^3(x^3)=\Delta^2(3x^2+3x+1)=\Delta(6x+6)=6\neq 0$，但 $\Delta^4=0$，与上述结论一致。 □

习题 5. （选做）设 A 是域 F 上线性空间 V 上的线性算子，$\mu_A\in F[t]$ 是 A 的极小多项式。证明：

$$V=\ker(A)\oplus\operatorname{im}(A)\iff t^2\nmid\mu_A.$$

证明. 设 μ_A 是 A 的极小多项式。

(⇒) 设 $V=\ker(A)\oplus\operatorname{im}(A)$，证明 $t^2\nmid\mu_A$。

反设 $t^2\mid\mu_A$，即 $\mu_A=t^2g(t)$ 对某个 $g\in F[t]$ 成立。

由于 μ_A 是极小多项式，$tg(t)$ 的次数严格小于 μ_A 的次数，故存在 $v \in V$ 使得 $Ag(A)v \neq 0$。令 $w = g(A)v$，则 $Aw \neq 0$，但 $A^2w = A(Aw) \in \mathrm{im}(A)$。

注意 $A^2w = A^2g(A)v$，而 $\mu_A(A) = 0$ 即 $A^2g(A) = 0$，故 $A^2w = 0$，即 $Aw \in \ker(A)$。

同时 $Aw \in \mathrm{im}(A)$，所以 $Aw \in \ker(A) \cap \mathrm{im}(A)$。

由直和条件，$\ker(A) \cap \mathrm{im}(A) = \{0\}$，故 $Aw = 0$，矛盾。因此 $t^2 \nmid \mu_A$。

(⇐) 设 $t^2 \nmid \mu_A$，证明 $V = \ker(A) \oplus \mathrm{im}(A)$。

由于 $t^2 \nmid \mu_A$，写 $\mu_A = t^s h(t)$，其中 $s \in \{0,1\}$ 且 $\gcd(t, h(t)) = 1$（即 $h(0) \neq 0$）。

情形一： $s = 0$**，即** $t \nmid \mu_A$**，** $\mu_A(0) \neq 0$。此时 A 可逆，$\ker(A) = \{0\}$，$\mathrm{im}(A) = V$，直和显然成立。

情形二： $s = 1$**，即** $\mu_A = th(t)$**，** $h(0) \neq 0$。由 $\gcd(t, h(t)) = 1$，存在 $u(t), v(t) \in F[t]$ 使得

$$t \cdot u(t) + h(t) \cdot v(t) = 1.$$

对算子 A 代入，得

$$A \cdot u(A) + h(A) \cdot v(A) = \mathrm{id}_V.$$

故对任意 $x \in V$：

$$x = A(u(A)x) + h(A)(v(A)x).$$

注意 $A(u(A)x) \in \mathrm{im}(A)$，并且

$$A \cdot h(A)(v(A)x) = (Ah(A))(v(A)x) = \mu_A(A)(v(A)x) = 0,$$

故 $h(A)(v(A)x) \in \ker(A)$。这说明 $V = \ker(A) + \mathrm{im}(A)$。

再证交集为零：设 $y \in \ker(A) \cap \mathrm{im}(A)$，由 $Ay = 0$ 和分解 $\mathrm{id} = Au(A) + h(A)v(A)$，

$$y = Au(A)y + h(A)v(A)y = 0 + h(A)v(A)y.$$

又 $y = Az$，故

$$y = h(A)v(A)Az = Ah(A)v(A)z = \mu_A(A)v(A)z = 0$$

综合两种情形，$V = \ker(A) \oplus \mathrm{im}(A)$。 □

期中考试

习题 5. 设 V 是域 F 上的 n 维线性空间，X 是 V 的子空间。

(i) 证明：存在 V 的子空间 Y 使得 $V = X \oplus Y$。

(ii) 再设 W 是 V 的子空间满足 $V = X + W$。证明：存在 V 的子空间 Y 满足：

$$V = X \oplus Y \quad \text{且} \quad Y \subset W.$$

证明. **(i)** 设 $x_1, \ldots, x_d$ 是 X 的一组基。把该基扩充为 V 的一组基

$$x_1, \ldots, x_d, x_{d+1}, \ldots, x_n.$$

令 $Y = \langle x_{d+1}, \ldots, x_n \rangle$。设 $x \in X$ 和 $y \in Y$ 使得 $0 = x + y$。因为 $x \in X$，所以存在 $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in F$，使得

$$x = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i x_i.$$

类似地，存在 $\alpha_{d+1}, \ldots, \alpha_n \in F$，使得 $y = \sum_{j=d+1}^{n} \alpha_j x_j$。于是

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0.$$

因为 $x_1, \ldots, x_n$ 是基底，所以 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$，故 $x = y = 0$。由此可知 $X + Y$ 是直和。进而，

$$\dim(X + Y) = \dim(X) + \dim(Y) = d + (n - d) = n.$$

因为 $X + Y \subset V$ 且 $\dim(X + Y) = \dim(V)$，所以 $V = X \oplus Y$。

(ii) 由 (i) 可知，存在子空间 $Y \subset W$ 使得 $W = (X \cap W) \oplus Y$。结合 $V = X + W$，我们有

$$V = X + X \cap W + Y.$$

因为 $X + X \cap W = X$，所以 $V = X + Y$。注意到 $W \cap Y = Y$，故

$$X \cap Y = X \cap (W \cap Y) = (X \cap W) \cap Y = \{0\},$$

其中最后一个等式来自 $(X \cap W) + Y$ 是直和。因此 $X + Y$ 也是直和，即 $V = X \oplus Y$，且 $Y \subset W$。 $\square$

习题 6. 设 V 是 $\mathbb{R}$ 上 n 维线性空间，q 是 V 上的二次型且 $r = \mathrm{rank}(q)$。

(i) 证明：V 中存在 $n-r$ 维的子空间 W，使得 $\forall w \in W$，$q(w) = 0$。

(ii) 进一步设 q 半正定。证明：不存在维数大于 $n-r$ 的子空间 $X \subset V$ 满足 $\forall x \in X$，$q(x) = 0$。

证明. 设 q 在 V 的某组基底 $e_1, \ldots, e_n$ 下的规范型为

$$q(x) = x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+l}^2,$$

其中 $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$，$r = k + l$。

(i) 令 $W = \langle e_{r+1}, \ldots, e_n \rangle$。则对任意 $w \in W$，$q(w) = 0$，且 $\dim(W) = n - r$。**(ii)** 因为 q 半正定，所以 $l = 0$，即 $k = r$，规范型为

$$q(x) = x_1^2 + \cdots + x_r^2.$$

假设存在维数大于 $n-r$ 的子空间 $X \subset V$ 满足 $\forall x \in X$，$q(x) = 0$。令 $Y = \langle e_1, \ldots, e_r \rangle$，则 $\dim(Y) = r$，从而

$$\dim(X \cap Y) = \dim(X) + \dim(Y) - \dim(X + Y) > (n - r) + r - n = 0.$$

故存在非零向量 $v \in X \cap Y$。因为 $v \in X$，所以 $q(v) = 0$。但因为 $v \in Y$ 且 $v \neq 0$，所以 $q(v) > 0$，矛盾。故不存在这样的子空间 X。 □

习题 7. 设 A 是 n 阶实对称矩阵且正定。证明：

(i) 对任意 $m \in \mathbb{Z}$，A^m 正定；

(ii) 如果存在 $k \in \mathbb{Z}^+$ 使得 $A^k = E$，则 $A = E$。

证明. 因为 A 正定，所以存在 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 使得 $A = P^t P$。

(i) 当 $m = 0$ 时，$A^m = E$，正定显然成立。当 $m = 1$ 时，结论也显然成立。

设 $m > 1$。若 $m = 2k$，令

$$Q = \underbrace{(P^t P)(P^t P) \cdots (P^t P)}_{k}.$$

则 Q 对称、可逆且 $A^m = Q^2 = Q^t Q$，故 A^m 正定。

若 $m=2k+1$，令

$$Q=\underbrace{(P^tP)(P^tP)\cdots(P^tP)}_{k}\cdot P^t.$$

则 $A^m=QQ^t$，故 A^m 正定。

因为 A^{-1} 也正定，上述结论蕴含 A^{-m} 正定，其中 m 是任意正整数。综上，对任意 $m\in\mathbb{Z}$，A^m 正定。

(ii) 因为 $A^k=E$，所以 $E-A^k=O$，从而

$$(E-A)\underbrace{(E+A+\cdots+A^{k-1})}_{B}=O.$$

由 (i) 知，$E,A,A^2,\ldots,A^{k-1}$ 均正定，而正定矩阵之和仍正定，故 B 正定，从而 B 可逆。于是由 $(E-A)B=O$ 得 $E-A=O$，即 $A=E$。 $\square$

习题 8. 设 A 是 n 阶实对称矩阵，$n>1$。它的 k 阶顺序主子式记为 Δ_k，$k=1,2,\ldots,n$。

(i) 当 $\Delta_1<0$，$\Delta_i>0$（$i=2,\ldots,n-1$），和 $\Delta_n<0$ 时，求 A 的签名，并说明理由。

(ii) 证明：如果 $\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_{n-1}$ 都大于零且 $\Delta_n=0$，则 A 中位于第 n 行第 n 列处的元素非负。

证明. **(i)** 根据 Jacobi 定理，

$$A\sim_c \mathrm{diag}\left(\Delta_1,\,\frac{\Delta_2}{\Delta_1},\,\frac{\Delta_3}{\Delta_2},\,\ldots,\,\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}},\,\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\right).$$

各对角元的符号由条件确定：

- $\Delta_1<0$：第一个对角元为负；
- 对 $i=2,\ldots,n-1$：$\Delta_i>0$ 且 Δ_{i-1} 的符号交替（$\Delta_1<0,\Delta_2>0,\Delta_3>0,\ldots$），故 Δ_i/Δ_{i-1} 的符号需逐项分析。具体地，$\Delta_1<0$，$\Delta_2>0$ 故 $\Delta_2/\Delta_1<0$；对 $i\ge 3$，$\Delta_i>0$ 且 $\Delta_{i-1}>0$，故 $\Delta_i/\Delta_{i-1}>0$；
- $\Delta_n<0$ 且 $\Delta_{n-1}>0$，故 $\Delta_n/\Delta_{n-1}<0$。

综合可知，对角化后共有 $n-3$ 个正对角元（对应 $i=3,\dots,n-1$）和 3 个负对角元（对应 $i=1,2,n$）。

当 $n>2$ 时，A 的签名为 $(n-3,3)$。

当 $n=2$ 时，签名为 $(1,1)$（即不定）。

(ii) 设

$$A=\begin{pmatrix} M & \mathbf{v} \\ \mathbf{v}^t & a_{nn} \end{pmatrix},$$

其中 M 是 A 的 $(n-1)$ 阶顺序主子矩阵。因为 $\Delta_1>0,\dots,\Delta_{n-1}>0$，由正定性判断准则知 M 正定，故 M^{-1} 存在且正定。

通过行列相伴消元（配方），有

$$A\sim_c B=\begin{pmatrix} M & \mathbf{0}_{n-1} \\ \mathbf{0}_{n-1}^t & a_{nn}-\mathbf{v}^tM^{-1}\mathbf{v} \end{pmatrix}.$$

由于 $\det(A)=\Delta_n=0$，有 $\det(B)=0$，从而

$$\det(M)\big(a_{nn}-\mathbf{v}^tM^{-1}\mathbf{v}\big)=0.$$

因为 $\det(M)=\Delta_{n-1}\neq 0$，所以

$$a_{nn}=\mathbf{v}^tM^{-1}\mathbf{v}.$$

因为 M^{-1} 正定，对任意列向量 $\mathbf{v}$，有 $\mathbf{v}^tM^{-1}\mathbf{v}\geq 0$。故 $a_{nn}\geq 0$。 $\square$