2026年5月3日 星期日　16:00

习题课 9

1. F是域，$J_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ 和 $E_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，计算

$A=J_2$，$B=\begin{pmatrix}J_2&0\\0&0\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}J_2&0\\0&E_2\end{pmatrix}$，$D=\begin{pmatrix}J_2&0\\0&J_2\end{pmatrix}$

的极小多项式

解：注意到 $J_2^2=0$，且 E_2, J_2 在 F 上线性无关，故 $\mu_{J_2}(t)=t^2$

又 $\mu_{E_2}(t)=t-1$，由此得到

$\mu_A(t)=t^2$，$\mu_B(t)=t^2$，$\mu_C(t)=\operatorname{lcm}(\mu_{J_2}(t),\mu_{E_2}(t))$
$=t^2(t-1)$

$\mu_D(t)=t^2$

2. V 为 F 上有限维线性空间，A 为 V 上线性算子，V_1, V_2 为 A 子空间

求证：V_1+V_2 和 $V_1\cap V_2$ 为 A-子空间.

证明：显然 V_1+V_2 和 $V_1\cap V_2$ 为 V 子空间.

① 令 $\alpha\in V_1+V_2$，$\exists\ \alpha_1\in V_1, \alpha_2\in V_2$，$\alpha=\alpha_1+\alpha_2$，

则 $A\alpha=A\alpha_1+A\alpha_2\in V_1+V_2$，故 V_1+V_2 为 A-子空间.

② 令 $\alpha\in V_1\cap V_2$，故 $\alpha\in V_1$ 且 $\alpha\in V_2 \Longrightarrow A\alpha\in V_1$ 且 $A\alpha\in V_2$

即 $A\alpha\in V_1\cap V_2$，故 $V_1\cap V_2$ 为 A-子空间

3. V 为 F 上有限维线性空间，A 是 V 上线性算子，U 为 V 中 A-子空间. 证明：对 $\forall f(t)\in F[t]$，U 是 $f(A)$-子空间.

证明：设 $f(t)=a_nt^n+\cdots+a_1t+a_0$，$a_i\in F$，$0\le i\le n$.

则对 $\forall\ \alpha\in U$，由 U 为 A-子空间，故 $A\alpha\in U$，

则 $f(A)\cdot\alpha=(a_nA^n+\cdots+a_1A+a_0)\alpha$
$=a_nA^n\cdot\alpha+\cdots+a_1A\alpha+a_0\alpha\in U$

故 U 为 $f(A)$-子空间.

4. 设 $A\in M_n(F)$. 证明：对任意 $f(t)\in F[t]$，$f(A)=0$

$\Longleftrightarrow \operatorname{rem}(f(t),\mu_A(t),t)=0$

证明：$f(t)$ 对 $\mu_A(t)$ 作带余除法：$\exists\ q(t), r(t)$ s.t

$f(t)=q(t)\cdot\mu_A(t)+r(t)$，$\deg_t r(t)<\deg_t \mu_A(t)$

$r(t)=\operatorname{rem}(f(t),\mu_A(t),t)$.

$\Longrightarrow$：若 $f(A)=0$，将 A 代入带余除法 $\Longrightarrow r(A)=0$，

由 $\mu_A(t)$ 的定义，$r(t)\equiv 0$.

$\Longleftarrow$：若 $r(t)=0$，则 $f(A)=q(A)\cdot\mu_A(A)=0$.

5. 设 V 为 F 上有限维线性空间，A 为 V 上线性算子，$\mu_A(t)$ 是 A 的极小多项式. 设 $\mu_A=pq$，其中 $p, q\in F[t]$ 且 $\gcd(p,q)=1$.

设 $B:\ker(q(A))\longrightarrow V$
$x\longrightarrow p(A)\cdot(x)$.

证明：

(i) B 是 $\ker(q(A))$ 上的线性算子

(ii) B 可逆.

证明：(i) ① $\forall\ x\in\ker(q(A))$，$q(A)\cdot x=0$

故 $q(A)\cdot p(A)\cdot x=p(A)\cdot q(A)\cdot x=0$，即 $Bx\in\ker(q(A))$

② $\forall\ x_1, x_2\in\ker(q(A))$，$a_1, a_2\in F$，

$B(a_1x_1+a_2x_2)=p(A)\cdot(a_1x_1+a_2x_2)=a_1p(A)\cdot x_1+a_2p(A)\cdot x_2$
$=a_1Bx_1+a_2Bx_2$.

注意要说明从"自身"到"自身".

(ii) 由 $\gcd(p,q)=1$，故 $\exists\ \mu_1(t), \mu_2(t)\in F[t]$.

$p\mu_1+q\mu_2=1$

令 $B':\ker(q(A))\longrightarrow\ker(q(A))$
$x\longrightarrow\mu_1(A)\cdot x$

B' 为 $\ker q(A)$ 上的线性映射. 且对 $\forall\ x\in\ker q(A)$

$B'\circ Bx=\mu_1(A)\cdot p(A)\cdot x=(1-q(A)\cdot\mu_2(A))\cdot x=x$

故 $B'\circ B=Id_{\ker q(A)}$. 同理可证 $B\circ B'=Id_{\ker q(A)}$.

故 B 可逆. (或者证明 B 是单射，从而满射

矩阵相似，极小多项式 (以下均默认为 n 阶方阵)

1. 判断以下矩阵是否相似 (若 $A\sim_s B$，则 $f(A)\sim_s f(B)$)

① $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$　$\operatorname{rank}(A-I)=1$，$\operatorname{rank}(B-I)=2$

② $A=\begin{pmatrix}1&4&1\\2&2&3\\3&3&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&4&4\\3&1&3\\2&1&2\end{pmatrix}$　$Tr(A)=5$，$Tr(B)=4$

③ $A=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&1&3&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$　$(A-I)^2=\begin{pmatrix}0&0&6&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$(B-I)^2=0$

2.

(1) 若 $A\sim_s B$，$C\sim_s D$，证明：$\begin{pmatrix}A&0\\0&C\end{pmatrix}\sim_s\begin{pmatrix}B&0\\0&D\end{pmatrix}$

设 $P, Q\in GL_n(F)$，$P^{-1}AP=B$，$Q^{-1}CQ=D$，则令 $H=\begin{pmatrix}P&\\&Q\end{pmatrix}$，则 $H^{-1}\begin{pmatrix}A&0\\0&C\end{pmatrix}H=\begin{pmatrix}B&0\\0&D\end{pmatrix}$

(2) 若 A 可逆，则 $AB\sim_s BA$

$BA=A^{-1}\cdot AB\cdot A$

3. (1) 证明：若 $A\sim_s B$，则 $\mu_A(t)\sim\mu_B(t)$ (差一个首项系数).

(2) 反之不成立，举一个反例.

$A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　$A\not\sim_s B$，但 $\mu_A(t)=\mu_B(t)=t(t-1)$

(3) 定义 A 的特征多项式 $f(t)=\det(tI-A)$.

在(2)基础上，举一个例子：$A\not\sim_s B$，但 A 与 B

特征多项式与极小多项式均相同.

$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

4 判断 $\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}3&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$ 是否相似，若相似，求 $P\in GL_n(F)$

s.t $P^{-1}\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}P=\begin{pmatrix}3&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$

解：令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则 $\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}3&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$

$\left(\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}-3I\right)\alpha_1=0$　取 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$　　$P=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$

$\left(\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}-I\right)\alpha_2=0$　取 $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$\left(\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}-2I\right)\alpha_3=0$　取 $\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$