第十二次作业

1. 在 $\mathbb{Z}_{12}$ 中,

   (i) 找出所有关于乘法的可逆元,

   (ii) 求解方程 $\bar{4}x = \bar{0}$ 的解.

2. 设 $A, B, C, D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 且 A 可逆. 证明:

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D - CA^{-1}B).$$

3. 计算

$$\det \begin{pmatrix} 1+a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & 1+a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & 1+a_nb_n \end{pmatrix}.$$

   提示: 利用 Sylvester 行列式等式.

4. 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, 证明:

$$\operatorname{rank}(A^\vee) = \begin{cases} n & \text{如果 } \operatorname{rank}(A) = n, \\ 1 & \text{如果 } \operatorname{rank}(A) = n-1, \\ 0 & \text{如果 } \operatorname{rank}(A) < n-1. \end{cases}$$

5. 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

   (i) 证明: 如果 A 和 B 都可逆, 则 $(AB)^\vee = B^\vee A^\vee$.

   (ii) 证明: 存在足够大的实数 x, 使得 $xE + A$ 和 $xE + B$ 同时可逆.

   (iii) (选做) 利用 (i) 和 (ii) 证明 $(AB)^\vee = B^\vee A^\vee$ 对 $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 中所有方阵 A, B 都成立.