第十三次作业

1. 设 $(M, \cdot, e)$ 是含幺半群, $u \in M$. 如果对于任意 $x \in M$, $xu = x$. 证明: $u = e$.

2. 设 $\mathbb{R}^+$ 是正实数的集合. 证明:

   (i) $(\mathbb{R}^+, \cdot, 1)$ 是群, 其中 $\cdot$ 代表实数的乘法.

   (ii) 对数函数:

$$\begin{array}{rccc} \log: & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \log(x) \end{array}$$

   是从 $(\mathbb{R}^+, \cdot, 1)$ 到 $(\mathbb{R}, +, 0)$ 的群同构.

3. (i) 设 S_n 是置换群,

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{sgn}: & S_n & \to & \{1, -1\} \\ & \sigma & \mapsto & \epsilon_\sigma. \end{array}$$

   验证: sgn 是从 S_n 到群 $(\{-1, 1\}, \cdot, 1)$ 的同态.

   (ii) 证明: 从 $(\mathbb{Z}_4, +, \bar{0})$ 到 $(\mathbb{Z}_2, +, \bar{0})$ 只有两个群同态.

4. (i) 设 $G := \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) \in \mathbb{Q}\}$. 证明: G 是 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 的子群.

   (ii) 设 $A_n = \{\sigma \in S_n \mid \sigma \text{ 是偶置换}\}$. 证明: A_n 是 S_n 的子群.

5. 设 $\phi : (G, \cdot, e) \to (H, *, \epsilon)$ 是群同态. 证明:

   (i) $\ker(\phi) := \{g \in G \mid \phi(g) = \epsilon\}$ 是 G 的子群;

   (ii) ϕ 是单射当且仅当 $\ker(\phi) = \{e\}$;

   (iii) 对于任意 $g \in G$, $x \in \ker(\phi)$, $g^{-1}xg \in \ker(\phi)$.

6. 设 $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. 证明: 如果 AB 的阶是 $k < \infty$, 则 BA 的阶也是 k. 举例说明: 对任意 $n \in \mathbb{Z}^+$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 中都含有阶是无穷的元素.