第十四次作业

1. 设有限域 $\mathbb{Z}_2=\{\bar{0},\bar{1}\}$, 线性映射 $\phi:\mathbb{Z}_2^4\to\mathbb{Z}_2^3$ 由

$$\phi(\mathbf{e}_1)=\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3,\ \phi(\mathbf{e}_2)=\epsilon_1,\ \phi(\mathbf{e}_3)=\epsilon_1+\epsilon_2,\ \phi(\mathbf{e}_4)=\epsilon_1+\epsilon_3$$

确定, 其中 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4$ 是 $\mathbb{Z}_2^4$ 的标准基, $\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3$ 是 $\mathbb{Z}_2^3$ 的标准基. 计算

   (i) 线性映射 ϕ 在上述标准基下的矩阵,

   (ii) $\dim(\mathrm{im}(\phi)$ 和 $\dim(\ker(\phi))$,

   (iii) $\phi(\mathbf{v})$, 其中 $\mathbf{v}=(\bar{1},\bar{1},\bar{1},\bar{1})^t$.

2. 设

$$A=\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{2}\\ \bar{0}&\bar{3}&\bar{0}\\ \bar{2}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix}\in\mathrm{M}_3(\mathbb{Z}_5).$$

判断 A 是否可逆. 如果可逆, 计算 A 的逆.

3. 设有限域 $\mathbb{Z}_3=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2}\}$. 计算线性方程组 $\begin{cases}x_1+\bar{2}x_2+x_3+\bar{2}x_4=\bar{1}\\ x_1+x_3=\bar{2}\\ x_1+x_2+x_3+x_4=\bar{0}\end{cases}$ 在 $\mathbb{Z}_3^4$ 中的所有解的个数.

4. 设 p 是素数. 证明:

   (i) 对于任意 $\overline{m}\in\mathbb{Z}_p$, $\overline{m}^p=\overline{m}$;

   (ii) 对于任意 $k\in\mathbb{N}$, $\bar{a},\bar{b}\in\mathbb{Z}_p$, $(\bar{a}+\bar{b})^{p^k}=\bar{a}^{p^k}+\bar{b}^{p^k}$.

5. 设 D 是有限整环. 证明 F 是域. (提示. 利用左平移)

6. 设 F 是域, $A\in\mathrm{M}_n(F)$ 且 $A\neq O$.

   (i) 设 $B\in F[A]$ 且 $B\neq O$. 证明: B 是环 $F[A]$ 的零因子当且仅当 $\mathrm{rank}(B)<n$.

   (ii) 设 $C\in\mathrm{M}_n(F)$. 证明: $\mathrm{rank}(C)<n$ 当且仅当存在非零矩阵 $M\in\mathrm{M}_n(F)$ 满足

$$MC=CM=O.$$