# 第十五次作业

1. 设 $f=\bar{2}x^3-x+\bar{2}$ 和 $g=\bar{2}x^2+\bar{2}x$ 是 $\mathbb{Z}_4[x]$ 中的多项式. 计算 $fg$, $\deg(fg)$ 和 $g\left(\bar{i}\right)$, $i=0,1,2,3$.

2. 设 $f=x^3-x+\bar{2}$ 和 $g=\bar{2}x^2+x$ 在$\mathbb{Z}_5[x]$ 中. 计算 $\mathrm{quo}(f,g,x)$ 和 $\mathrm{rem}(f,g,x)$.

3. 设 $f(x)=x^2+\bar{2}x-\bar{3}\in\mathbb{Z}_7[x]$. 计算 $f(\bar{5})$ 和 $f(A)$, 其中 $A=\begin{pmatrix}\bar{1}&0&0\\\bar{1}&\bar{1}&0\\0&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix}\in\mathrm{M}_3(\mathbb{Z}_7)$.

4. 设 $f=236x^3-125x+54$ 和 $g=5000x^7-21x+3367$ 是整系数多项式, $h=fg$. 计算 $h(\bar{3})$, 其中 $\bar{3}\in\mathbb{Z}_5$.

5. 设 $A=(a_{i,j})\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, 其中 $a_{i,j}\in\mathbb{Z}$, $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$. 再设 $p$ 是素数, $\bar{a}_{i,j}$ 是 $a_{i,j}$ 在 $\mathbb{Z}_p$ 中关于同余关系的等价类. 令 $\bar{A}=(\bar{a}_{i,j})\in\mathrm{M}_n(\mathbb{Z}_p)$. 证明: 如果 $\det(\bar{A})\neq\bar{0}$, 则 $\det(A)\neq 0$.

6. (矩阵求逆的多项式法 revisited). 设 $F$ 是域, $A\in\mathrm{M}_n(F)$ 且 $A\neq O$. 设

$$f(x)=f_nx^n+f_{n-1}x^{n-1}+\cdots+f_1x+f_0\in F[x],\quad f_i\in F,$$

$f_n\neq 0$ 且 $f(A)=O$.

(i) 证明: 如果 $f_0\neq 0$, 则 $A$ 可逆且 $A^{-1}=-f_0^{-1}\left(f_nA^{n-1}+f_{n-1}A^{n-2}+\cdots+f_2A+f_1E\right)$.

(ii) 证明: 如果 $f_0=0$, 且对于任意 $F[x]$ 中次数小于 $n$ 的非零多项式 $g(x)$, 我们都有 $g(A)\neq O$, 则 $A$ 不可逆.

(iii) 设 $A^3-2A+12E=O$. 证明: 当 $F$ 的特征不等于 2 和 3 时, $A$ 可逆并求 $A^{-1}$.