

第二次作业

1. 设映射:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2. \end{aligned}$$

- (i) 确定 $\text{im}(f)$.
- (ii) 设 $g = f|_{[0,2]}$. 确定 $\text{im}(g)$ 并证明 g 是单射.

2. 设 $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ 由公式 $f(n) = n + 1$ 给出, $g: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ 由

$$g(n) = \begin{cases} n - 1 & \text{如果 } n > 1 \\ 1 & \text{如果 } n = 1 \end{cases}$$

给出.

- (i) 证明: f 是单射和 g 是满射.
- (ii) 对任意整数 n , 计算 $f \circ g(n)$ 和 $g \circ f(n)$.

3. 设映射 $f: X \rightarrow Y$ 且 S, T 是 Y 的子集. 证明以下断言:

- (i) $f^{-1}(S \cup T) = f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$.
- (ii) $f^{-1}(S \cap T) = f^{-1}(S) \cap f^{-1}(T)$.

4. 设映射 $f: X \rightarrow Y$ 且 A, B 是 X 的子集. 证明以下断言:

- (i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
- (ii) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
- (iii) 如果 f 是单射, 则 $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.