# 第三次作业

1. 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 和 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. 定义：

$$\begin{array}{rccc} f+g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x)+g(x) \end{array}.$$

   再设 $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

   (i) 证明: $(f+g)\circ h = f\circ h + g\circ h$.

   (ii) $h\circ(f+g) = h\circ f + h\circ g$ 是否总成立? 请说明理由.

2. 设 $f:X\to X$ 和 $g:X\to X$ 是映射, 且 $g$ 可逆. 令 $h=g^{-1}\circ f\circ g$. 证明:

   (i) 证明: 如果 $f$ 可逆, 则 $h$ 可逆且 $h^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}\circ g$.

   (ii) $f^2=f$ 当且仅当 $h^2=h$.

3. 设映射 $f:S\to T$. 设 $x,y\in S$. 如果 $f(x)=f(y)$, 则称 $x,y$ 关于 $f$ 等价, 并记为 $x\sim_f y$. 验证: $\sim_f$ 是 $S$ 上的等价关系.

4. 设 $n$ 是大于 1 的正整数, $\equiv_n$ 是 $\mathbb{Z}$ 上的同余关系. 设 $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ 满足 $a\equiv_n b$ 和 $c\equiv_n d$. 证明: $a+c\equiv_n b+d$ 和 $ac\equiv_n bd$.