

第四次作业

1. 设 $a, b \in \mathbb{Z}^+$ 且 $b \neq 0$. 如果存在 $c \in \mathbb{Z}$ 使得 $a = bc$. 则称 b 整除 a , 并记为 $b \mid a$.
 - (i) 证明: 整除关系 $\mid$ 是 $\mathbb{Z}^+$ 上的序关系.
 - (ii) 求 $[10]$ 中关于 $\mid$ 的极大元和极小元.
2. 设置换 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 7 & 2 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.
 - (i) 把 σ 写成互不相交的循环之积.
 - (ii) 计算 σ 的阶.
3. 设置换 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 1 & 7 & 2 & 8 & 5 & 6 & 3 & 10 & 9 \end{pmatrix}$. 确定 σ 的奇偶性.
4. 设 $\sigma \in S_n$. 我们称 $a, b \in [n]$ 关于 σ 等价, 如果存在 $k \in \mathbb{Z}$ 使得 $\sigma^k(a) = b$, 并记为 $\sim_\sigma$.
 - (i) 验证 $\sim_\sigma$ 是等价关系.
 - (ii) 设 $a \in [n]$. 证明: $\bar{a}$ 中的元素个数整除 $\text{ord}(\sigma)$.
5. (选做) 设 σ 和 $(i_1, \dots, i_k)$ 在 S_n 中. 证明: $\sigma(i_1, \dots, i_k)\sigma^{-1} = (\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_k))$.