

第五次作业

1. 计算 $\gcd(60, 35)$ 和 $u, v \in \mathbb{Z}$ 使得 $u \times 60 + v \times 35 = \gcd(60, 35)$,

2. 设 $m, n \in \mathbb{Z}^+$ 且 $g = \gcd(m, n)$. 证明:

(i) 如果 $u, v \in \mathbb{Z}$ 满足 $um + vn = g$, 则 u and v 互素.

(ii) 存在整数 $a \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ 和整数 b 满足 $am + bn = g$.

3. 设

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(i) 判定 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 是否线性相关.

(ii) 判定 $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是不是 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 的线性组合.

4. 设 $\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$. 证明: 如果存在唯一的 $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ 使得

$$\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k,$$

则 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ 线性无关.

5. (线性组合的“传递性”) 设 $\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l \in \mathbb{R}^n$. 证明: 如果 $\mathbf{u}$ 是 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ 的线性组合, $\mathbf{v}_i$ 是 $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l$ 的线性组合, $i = 1, 2, \dots, k$, 则 $\mathbf{u}$ 是 $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l$ 的线性组合.