

第八次作业

1. 设 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5$ 是 $\mathbb{R}^5$ 的标准基, $\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的标准基, 线性映射

$$\phi: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

由 $\phi(\mathbf{e}_1) = \boldsymbol{\epsilon}_1 - \boldsymbol{\epsilon}_2$, $\phi(\mathbf{e}_2) = \boldsymbol{\epsilon}_2 - \boldsymbol{\epsilon}_1$, $\phi(\mathbf{e}_3) = \boldsymbol{\epsilon}_1 - 2\boldsymbol{\epsilon}_2$, $\phi(\mathbf{e}_4) = \boldsymbol{\epsilon}_1$ 和 $\phi(\mathbf{e}_5) = \boldsymbol{\epsilon}_2$ 确定.

- (i) 计算 ϕ 在 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5; \boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2$ 下的矩阵.
(ii) 计算 $\text{im}(\phi)$ 的一组基和 $\dim(\ker(\phi))$.
(iii) 设 $\mathbf{x} = (1, 1, 1, 1, 1)^t$ 和 $\mathbf{y} = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_5$. 求 $\phi(\mathbf{x})$ 和 $\phi(\mathbf{y})$.

2. 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

计算 $2A - BC$.

3. 设 $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 计算所有满足 $XJ = JX$ 的二阶方阵 X .

4. 设线性映射 $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 在标准基 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 下的矩阵是 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 证明:

$$\ker(\phi) = \text{im}(\phi).$$

请回答 $\mathbb{R}^2$ 和 $\ker(\phi) + \text{im}(\phi)$ 是否相同? 并说明理由.

5. 设 $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是线性满射, V 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间. 证明:

$$\dim(\phi^{-1}(V)) \geq \dim(V).$$