第一次作业

1. 设 $f = x^3 + \bar{1}$ 和 $g = x^2 + \bar{1}$.

   (i) 设 $f, g \in \mathbb{Z}_2[x]$. 求 $\gcd(f, g)$.

   (ii) 设 $f, g \in \mathbb{Z}_3[x]$. 求 $\gcd(f, g)$.

2. 设 F 是域, $\mathcal{A} : F^n \to F^n$ 是线性映射且满足 $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$. 证明:

   (i) $\dim(\ker(\mathcal{A})) + \dim(\ker(\mathcal{A} - \mathcal{E})) = n$, 其中 $\mathcal{E}$ 是 F^n 上的恒同映射.

   (ii) $\ker(\mathcal{A} - \mathcal{E}) = \mathrm{im}(\mathcal{A})$.

3. 设 F 是域,

$$f = f_n x^n + f_{n-1} x^{n-1} + \cdots + f_0 = f_n (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n),$$

   其中 $f_n, f_{n-1}, \ldots, f_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ 且 $f_n \neq 0$. 证明:

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = -f_{n-1} f_n^{-1} \quad \text{和} \quad \alpha_1 \cdots \alpha_n = (-1)^n f_0 f_n^{-1}.$$

4. 设 F 是域,

$$\begin{array}{cccc} ' : & F[x] & \to & F[x] \\ & f = \sum_{i=0}^n f_i x^i & \mapsto & f' = \sum_{i=1}^n i f_i x^{i-1}, \end{array}$$

   其中 $f_i \in F$. 特别地, 对任意 $c \in F$, $c' = 0$. 称 $'$ 是 $F[x]$ 上的*形式导数*.

   验证: 对任意 $f, g \in F$,

   (i) $(f + g)' = f' + g'$,

   (ii) $(fg)' = f'g + fg'$.

约定. 在以下两题中, $'$ 是 $F[x]$ 上的形式导数.

5. 设 F 是特征为零的域, $p \in F[x]$ 不可约.

   (i) 证明: $\gcd(p, p') = 1$.

   (ii) 设 $f = p^m q$, 其中 $m > 0$, $q \in F[x]$ 且 $p \nmid q$. 证明: $p^{m-1} \mid f'$ 但 $p^m \nmid f'$.

6. 设 F 是特征为零的域, $f \in F[x] \setminus F$. 如果 f 的每个不可约因子的重数都小于 2. 则称 f 是无平方的(squarefree). 证明: f 无平方当且仅当 $\gcd(f, f') = 1$.